

ALEXANDRU DANCHIV

HIDRAULICA APLICATĂ

*ELEMENTE DE HIDRAULICĂ
GENERALĂ ȘI SUBTERANĂ*

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
2000

ALEXANDRU DANCHIV

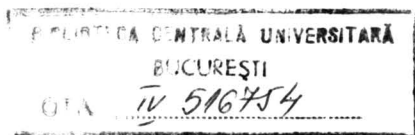
HIDRAULICA APLICATĂ

ELEMENTE DE HIDRAULICĂ
GENERALĂ ȘI SUBTERANĂ

Biblioteca CIP a Bibliotecii Naționale
 DANCHIV, ALEXANDRU
 Hidraulica aplicată: elemente de hidraulică
 generală și subterană / Alexandru Danchiv - București,
 Editura Universității din București, 2000.
 p. 252; cm 28
 Bibliogr.
 ISBN 973-572-422-3
 252(075.8)

**Editura Universității din București
2000**

Referenți științifici: **Prof. dr. ing. Florian ZAMFIRESCU**
Lector dr. ing. Mihaela STĂNCIUCU



602/00

© Editura Universității din București
Șos. Panduri 90-92, București - 76235; Tel./Fax: 410.23.84

B.C.U. București



C20003851

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
DANCHIV, ALEXANDRU

Hidraulica aplicată: elemente de hidraulică
generală și subterană / Alexandru Danchiv - București,
Editura Universității din București, 2000

p. 252; cm 28

Bibliogr.

ISBN 973-575-422-3

532(075.8)

CUPRINS

Pagina

1.	PROPRIETATILE FLUIDELOR	1
	1.1 Compresibilitatea fluidelor	1
	1.2 Vâscozitatea . Legea lui Newton	4
	1.3 Curgerea laminară și turbulentă	9
	1.4 Tensiunea superficială	10
	1.5 Unghiul de contact. Aderența	11
	1.6 Capilaritatea. Relația Laplace	12
2.	STATICA FLUIDELOR	15
	2.1. Forțe care acționează în fluid	15
	2.2. Ecuațiile de echilibru ale fluidelor	20
	2.3. Ecuația fundamentală a hidrostatiei	23
	2.4. Măsurarea presiunii hidrostactice .	26
	2.5. Aplicații.	
	Rezultanta forțelor de presiune pe o suprafață plană.	28
	2.6. Principiul lui Arhimede	31
3.	CINEMATICA FLUIDELOR	34
	3.1. Variabile Lagrange și Variabile Euler	34
	3.2. Caracterizarea câmpurilor.	36
	3.3. Viteze și accelerații	39
	3.4. Debit și debit specific	43
	3.5. Rotația fluidelor	45
	3.6 Mișcări irotaționale și rotaționale	48
4.	LEGI DE CONSERVARE.	50
	4.1. Conservarea masei .Ecuațiile de continuitate .	51
	4.2 Caz particular : tubul de curent	56
	4.3.Conservarea impulsului	58
5	DINAMICA FLUIDELOR	64
	5.1. Fluidul ideal. Ecuația Euler	64
	5.2. Fluidul vâscos. Ecuațiile Cauchy	66
	5.3. Ecuațiile Navier - Stokes	68
	5.4. Aplicații	70
6.	ECUAȚIA BERNOULLI	76
	6.1. Mișcarea în lungul unei linii de curent	76
	6.2. Semnificația energetică a ecuației Bernoulli	80
	6.3. Aplicații ale ecuației Bernoulli	84
	Curgerea prin orificii	85
	Fenomenul Venturi	86
	Punct de stagnare, Tub Pitot	89
	6.4. Ecuația Euler în mișcarea bidimensională	90
	6.5 Ecuația Bernoulli în mișcarea bidimensională	92

7. MEDIUL POROS. CARACTERIZARE CANTITATIVA	94
7.1. Caracteristicile mediului poros	96
7.2. Volumul elementar reprezentativ	99
7.3. Acvifere și sisteme acvifere	101
8. LEGEA DARCY	103
8.1. Experimentul Darcy	104
8.2. Sarcina piezometrică	106
8.3. Conductivitatea hidraulică	111
8.4. Valabilitatea legii Darcy	114
8.5. Mediul continuu. Generalizarea legii Darcy	117
8.6. Distribuția spațială a conductivității.	121
8.7. Medii fracturate	125
8.8. Mediul cu dublă porozitate	129
9. ECUAȚII DE MISCARE ALE APEI ÎN ACVIFERE	131
9.1. Deformarea matricii solide. Eforturi totale și efective	131
9.3. Ecuația de continuitate în acvifere sub presiune	136
9.3. Ecuația de continuitate în acvifere cu nivel liber	140
10. ANALIZA MISCĂRII APELOR SUBTERANE	144
10.1 Probleme corect puse	144
10.2. Condiții inițiale	145
10.3 Condiții de margine	146
10.4. Ecuația suprafeței libere	152
11. PROBLEME BIDIMENSIONALE ÎN HIDRAULICA SUBTERANĂ	158
11.1. Schematizarea Dupuit	158
11.2. Limitele aproximației Dupuit	161
11.3. Curgerea plan – orizontală	164
11.4. Efectul drenanței în cazul acviferelor sub presiune	168
11.5. Acvifere cu nivel liber	170
12. APLICĂȚII ALE IPOTEZEI DUPUIT	175
12.1. Acvifer sub presiune	175
12.2. Acvifer sub presiune cu drenanță verticală	177
12.3 Acvifer freatic stratificat	180
12.4 Acvifer cu nivel liber alimentat din precipitații	184
12.5. Acvifer cu nivel liber cu drenanță verticală	187
12.6. Puț perfect într – un acvifer sub presiune	191
12.6. Puț perfect într – un acvifer cu nivel liber	194
13. SPECTRUL HIDRODINAMIC	197
13.1 Potențialul vitezelor	197
13.2. Funcția de curent	197
13.3. Potențialul complex	204

13.4. Relații între caracteristicile spectrului și structura geologică	206
13.5 Relații de echivalență între spectrele hidrodinamice în medii izotrope și anizotrope	213
14. PRINCIPIUL SUPRAPUNERII EFECTELOR	218
14.1.Principiul superpoziției în cazul sistemelor acvifere	218
14.2 Suprapunerea efectelor condițiilor de margine. Regim permanent	220
14.3. Regimul nestaționar de mișcare	223
14.4. Aplicație. Efectul puțurilor în acvifere infinite extinse	227
14.5. Metoda imaginilor	234
BIBLIOGRAFIE	243

1. PROPRIETĂȚILE FLUIDELOR

Fluidele reprezintă stări de agregare ale materiei și cuprind lichidele și gazele. Lichidele nu au formă proprie dar au volum propriu iar gazele nu au nici formă nici volum propriu. Simpla observație arată că fluidele se diferențiază net de solide prin aceea că "curg", pot fi comprimate foarte mult (gazele) sau foarte puțin (lichidele). Dar chiar și între fluide apar diferențe importante: apa "curge mai ușor" decât uleiul. Fluidele se diferențiază deci prin valorile unor parametri macroscopici ce caracterizează răspunsul lor la diferite sollicitări.

1.1 Compresibilitatea fluidelor

Supusă acțiunii unor forțe exterioare, o masă constantă de fluid își modifică volumul și implicit densitatea. Fie V_0 volumul inițial al fluidului și ΔV variația acestuia când presiunea variază cu Δp . Raportul $\varepsilon_v = \Delta V/V_0$ se numește *deformație volumică specifică* iar relația empirică

$p = f(\varepsilon_v)$ este *relația constitutivă a fluidului* respectiv.

Panta relației constitutive este *modulul de compresibilitate* K iar inversul acesteia reprezintă *compresibilitatea* β a fluidului respectiv. Avem:

$$K(p) = -\frac{dp}{dV} = -\frac{dp}{\varepsilon_v(V)} \quad (1.2)$$

respectiv:

$$\beta = \frac{1}{K(p)} \quad (1.3)$$

Semnul - din relația (1.2) arată că volumul scade pe măsură ce presiunea crește.

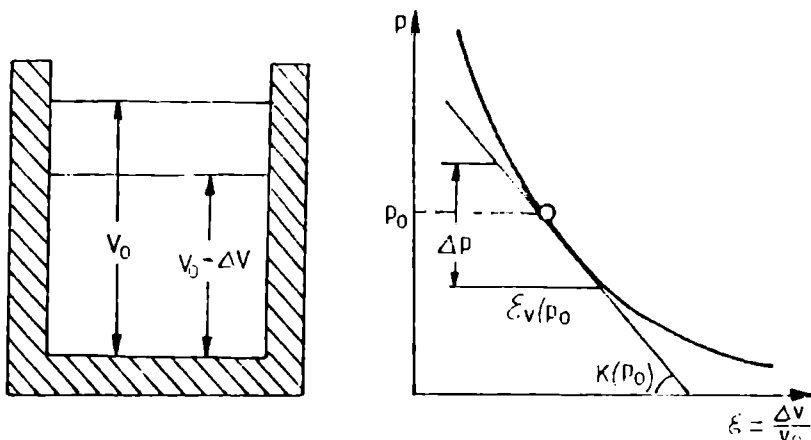


Figura 1.1: Curba caracteristică și coeficientul de compresibilitate al fluidelor.

Legea constitutivă poate fi exprimată și în funcție de densitate. Fie ρ_0 densitatea inițială și $d\rho$ variația densității corespunzătoare variației dV a volumului. Masa fiind constantă avem:

$$\rho_0 V_0 = \rho(V_0 + dV) \quad (1.4)$$

sau:

$$d\rho/\rho = -dV/V_0 \quad (1.5)$$

unde am notat cu ρ densitatea fluidului corespunzător volumului $V_0 + dV$. Introducând relația (1.5) în (1.2) și respectiv (1.3) obținem:

$$K(\rho) = -\frac{dp}{dV} = \frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{V} \quad (1.6)$$

și respectiv:

$$\beta = -\frac{1}{K(\rho)} = \rho \frac{d\rho}{dp} \quad (1.7)$$

Observații:

1^o Din relațiile (1.2) și (1.6) se observă că modulul de compresibilitate are dimensiuni de presiune astfel încât în S.I. unitatea de măsură este $Pa.$, iar a compresibilității este - conform cu ecuația (1.3) sau (1.7) Pa^{-1} .

2^o Semnul - din relația (1.2) indică micșorarea volumului lichidului odată cu creșterea presiunii. Deoarece densitatea crește cu presiunea semnul - nu mai apare în relațiile (1.6) și (1.7).

Aceasta se traduce prin panta negativă în cazul când relația constitutivă este exprimată în funcție de volume și respectiv prin pante pozitive atunci când variabila independentă a relației constitutive este densitatea (*Figura 1.1*).

În general legea constitutivă este nelineară astfel încât cele două caracteristici de materiale (modulul de compresibilitate și compresibilitatea) sunt funcții de valoarea presiunii sau a densității.

Dacă relația constitutivă este nelineară, modulul de compresibilitate și implicit compresibilitatea sunt, evident, independente de presiune sau densitate, fiind, pentru o temperatură dată, constante de material.

Spre deosebire de lichide, în cazul gazelor, relația constitutivă și implicit caracteristicile de material sunt funcții de natura procesului.

Să considerăm, pentru exemplificare, o masă de gaz ideal supusă succesiv unui proces izoterm și adiabatic. Relațiile constitutive sunt atunci pentru primul proces:

$$p/\rho = \text{constant} = C \quad (1.8)$$

respectiv:

$$p/\rho^\gamma = \text{constant} = C \quad (1.9)$$

pentru transformarea adiabatică.

Introducând (1.8) în (1.6) avem succesiv:

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho} = \rho C = p \quad (1.10)$$

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho} = M$$

După cum am arătat ecuația constitutivă este funcție de temperatură. Fie atunci o masă constantă de fluid caracterizată de ecuația de stare:

$$\rho = \rho(p, T) \quad (1.11)$$

Cum densitatea ei este o variabilă de stare, variația ei, în funcție de variabilele de stare fundamentale ale sistemului se obțin prin derivarea relației (1.11):

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T dp + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p dT \quad (1.12)$$

și împărțit cu ρ :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T dp + \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p dT \quad (1.13)$$

Conform relației (1.7) primul termen al ecuației (1.13) este compresibilitatea izotermă β a fluidului la temperatura T .

În mod analog, vom defini *coeficientul de dilatare termică izobar* al fluidului:

$$\alpha = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (1.14)$$

unde $\left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p$ reprezintă variația densității fluidului când temperatura acestuia crește cu dT ca urmare a unui proces izobar.

Cu aceste observații relația (1.12) devine:

$$d\rho/\rho = \beta dp - \alpha dT \quad (1.15)$$

Cum densitatea este o mărime de stare, variația ei între două valori oarecare ρ_0 și ρ este independentă de proces iar $d\rho$ este diferențiala totală exactă. Obținem atunci prin integrare:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{p_0}^p \beta dp - \int_{T_0}^T \alpha dT \quad (1.16)$$

După cum am arătat cele două caracteristici de material sunt funcții de presiune, respectiv de temperatură. Pentru comoditatea prezentării vom considera cazul unor relații constitutive lineare în care β și α sunt simple constante de material. În aceste condiții prin integrarea relației (1.16) obținem:

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \beta(p - p_0) - \alpha(T - T_0)$$

sau:

$$\rho = \rho_0 \exp [\beta(p - p_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (1.17)$$

În cazul lichidelor cei doi coeficienți au valori foarte mici. Astfel (*Tabelul 1.1*) pentru apă la temperatura de 20°C , $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4}$ respectiv $\beta = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$.

Dezvoltând atunci în serie exponențială, din ecuația (1.17) obținem pentru lichide o ecuație de stare de forma:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(p - p_0)] \quad (1.18)$$

Tabelul 1.1

Parametrii unor fluide la presiune normală

<i>Fluid</i>	<i>T (°C)</i>	ρ [Kg/m ³]	K [$\cdot 10^9$ Pa]	μ [$\cdot 10^4$ Pas]	σ [N/m]
apa	20	998	2,170	10	0,073
petrol	20	856	1,103	71,8	0,03
benzen	20	876	1,034	6,56	0,029
glicerină	20	1258	4,344	14940	0,063
mercur	15,6	13555	26,201	15,6	0,51
oxigen	- 196,6	1206	-	2,78	0,015
hidrogen	- 257,2	73,7	-	0,21	0,003

1.2 Vâscozitatea . Legea lui Newton

În experiența clasică a lui Newton se consideră mișcarea unui fluid limitată de două plăci paralele. Dacă placa superioară este supusă unei forțe constante se constată că mișcarea ei este uniformă. Mișcarea uniformă implică existența unei forțe de frecare la contactul placă - fluid. Conform legii a treia a mecanicii asupra fluidului acționează o forță egală și de semn contrar care generează eforturi de frecare în fluid (*Figura 1.2*).

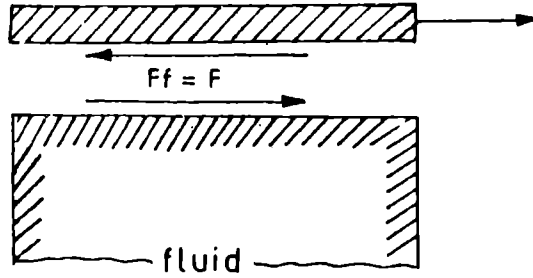


Figura 1.2: Distribuția forțelor de frecare la contactul placă – fluid

În consecință, spre deosebire de fluidele în echilibru, fluidele în mișcare pot prelua eforturi tangențiale, care conduc la deformarea fluidului. În experiența lui Newton masa de fluid dintre cele două plăci este supusă forfecării pure astfel încât își modifică forma, dar volumul ei rămâne constant.

Această deformare este mai mare sau mai mică în funcție de natura fluidului.

Proprietatea intrinsecă ce caracterizează rezistența fluidelor la preluarea eforturilor sau deformarea tangențială se numește *vâscozitate*.

Fizic, vâscozitatea este datorată forțelor de interacțiune moleculară (*coeziunea*) care nu permite desprinderea stratelor de fluid.

Calitativ, rezultatele experienței lui Newton sunt următoarele:

- Placa inferioară fiind imobilă, viteza particulelor de fluid aflate în contact cu această placă este nulă.
 - Placa superioară se mișcă uniform astfel încât toate particulele aflate în contact cu această placă se deplasează cu viteză constantă.

Există deci o variație a vitezei pe verticală de la $v = 0$ pe placa inferioară la viteza maximă v pe placa superioară (Figura 1.3).

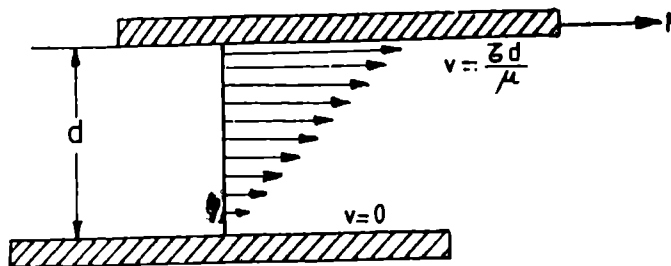


Figura 1.3: Profilul vitezelor în cazul unui fluid newtonian

Fie S suprafața plăcilor și d distanța dintre ele.

Dacă F este forța de tracțiune atunci în fluid, pe suprafața de contact cu această placă efortul tangențial τ_m este:

$$\tau_m = F / S \quad (1.19)$$

Cantitativ legea lui Newton, exprimă proporționalitatea între efortul de forfecare și gradientul vertical al vitezei:

$$\tau_m = \mu v / d \quad (1.20)$$

Coeficientul de proporționalitate μ din ecuația (1.20), denumit *coeficient de vâscozitate dinamică* este o constantă de material.

În relația (1.20) profilul vitezei este linear - gradientul constant - ceea ce revine la un efort tangențial constant. Într-adevăr dacă $v = kd$ relația precedentă revine la:

$$\tau = \mu k = ct. \quad (1.21)$$

Acest tip de mișcare caracterizată prin efort tangențial constant, respectiv gradient constant al vitezei se numește *mișcare Couette* după numele celui care a studiat-o prima oară.

În fapt există o variație continuă a vitezei pe verticală care nu este neapărat lineară.

Dacă fluidul este imaginat ca fiind alcătuit din strate subțiri ce alunecă unul peste celălalt (*denumite lamine*) vâscozitatea este datorată atunci forțelor de frecare dintre două strate succesive.

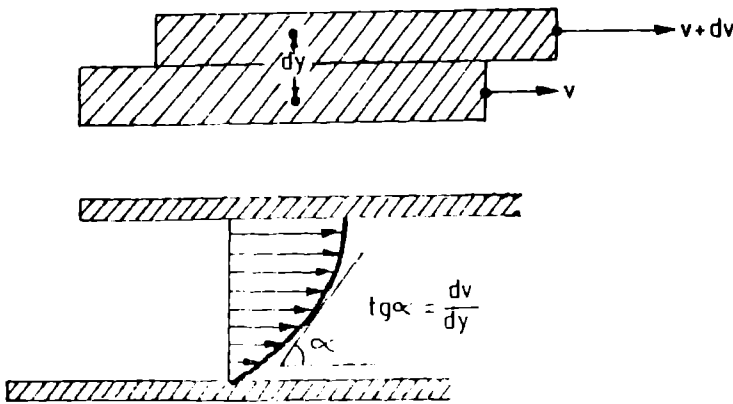


Figura 1.4: Profilul vitezelor în cazul unui fluid real

Fie atunci (Figura 1.4) două asemenea strate având centrele distanțate cu dy și fie v respectiv $v + dv$ vitezele acestor două strate.

Deoarece gradientul vertical al acestor două viteze este dv / dy , atunci formula locală - diferențială - a legii lui Newton este:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.22)$$

unde am notat cu τ efortul tangențial între cele două strate.

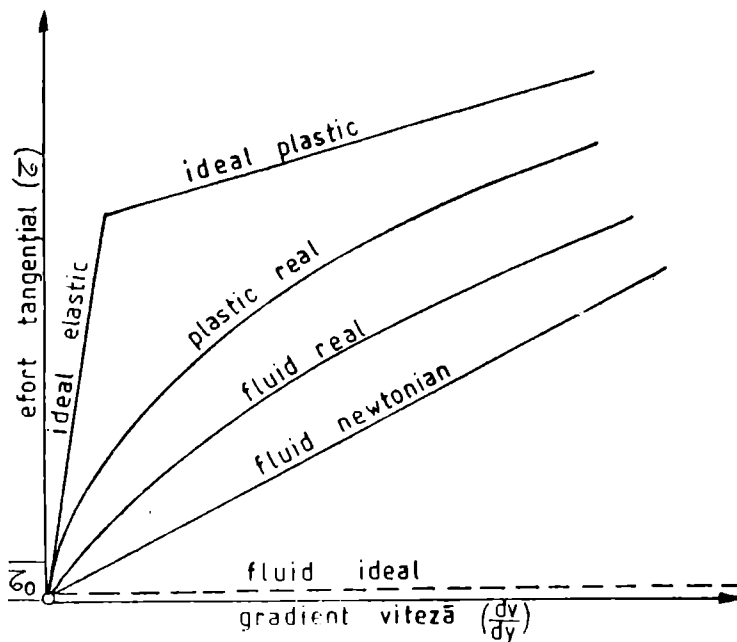


Figura 1.5: Curbe caracteristice τ – grad v pentru solide și lichide.

Observații

1^o Coeficientul de frecare vâscoasă este o constantă de material și este independentă de starea de efort din fluid și de oricare din componentele - normală sau tangențială ale eforturilor.

2^o Deși este datorat unor forțe de frecare, efortul tangențial care intervine în relația (1.22) este independent de efortul normal. Aceasta diferențiază un fluid de un solid. Conform legii Coulomb în cazul solidului efortul tangențial este proporțional cu efortul normal pe planul de alunecare.

3^o În ecuațiile fundamentale ale dinamicii fluidelor datorate lui Navier - Stokes intervine raportul μ / ρ unde ρ este densitatea fluidului. Se introduce o nouă constantă de material, *vâscozitatea cinematică* definită de:

$$\nu = \mu / \rho \quad (1.23)$$

prin intermediul unei constante de material.

4^o Legea lui Newton este o lege fenomenologică, de legătură între cauză (τ) și efect

(dv / dy): dacă $\tau = 0$ și $dv / dy = 0$ indiferent de mărimea lui μ .

5^o Profilul vitezelor poate avea forme variate dar nu poate fi niciodată tangentă la suprafața solidului deoarece aceasta ar conduce la gradient infinit al vitezei și implicit la eforturi tangențiale infinite.

Or experiența arată că viteza fluidului pe suprafața inferioară este nulă: nu au loc alunecări relative între solid și fluid.

6^o La scară moleculară vâscozitatea reprezintă efectul cumulat al forțelor de legătură intermoleculare.

În cazul lichidelor forțele de legătură - coeziune - sunt predominante. Cum ele scad cu creșterea temperaturii vâscozitatea va scădea la rândul ei cu creșterea temperaturii.

Invers, în cazul gazelor efortul tangențial dintre două strate care se deplasează rezultă din ciocnirea moleculelor normal pe direcția de mișcare.

În urma coliziunii are loc omogenizarea temperaturii și implicit a vitezelor. Ca urmare stratele mai lente își vor mări viteza iar în stratele mai rapide viteza va scădea. Acest proces este cu atât mai intens cu cât temperatura este mai mare, astfel încât vâscozitatea va crește cu temperatura.

7^o Un fluid cu vâscozitatea neglijabilă este un fluid ideal. El este caracterizat prin absența eforturilor de frecare, inclusiv la contactul cu un perete solid, iar vitezele într-o secțiune perpendiculară pe direcția de curgere sunt egale.

Fluidele ideale sunt de fapt o simplă abstractizare. La contactul unui fluid real cu un perete solid, asperitățile acestuia sunt întotdeauna mai mari decât moleculele fluidului. Astfel la contactul cu solidul este captat întotdeauna un strat de fluid care se află în repaus, denumit strat limită.

Dacă fluidul ar aluneca peste solid, gradientul vitezelor - și implicit eforturile tangențiale la contact - ar tinde către infinit. Cum acest lucru este imposibil viteza fluidului dincolo de stratul limită variază continuu.

8^o Valorile vâscozității permite, în mod empiric, departajarea între solid și fluid. Din examinarea curbelor caracteristice prezentate în *figura 1.5* se constată următoarele:

- un solid rigid are vâscozitatea infinită:
- un solid elastic este caracterizat nu numai prin vâscozitate foarte mare dar și

printr-o valoare limită $\left(\frac{dv}{dy}\right)_l$ a gradientului vitezei.

Odată depășită această valoare corpul are o comportament ideal plastic, foarte asemănător cu cel al unui fluid newtonian.

Diferența constă în faptul că starea plastică apare pentru eforturi de forfecare ce depășesc o valoare critică iar relația caracteristică a fluidelor newtoniene este o dreaptă ce trece prin originea axelor de coordonate.

Unități de măsură

Dimensiunile coeficientului de vâscozitate dinamică rezultă din legea lui Newton (1.20):

$$\langle \mu \rangle = \frac{\langle \tau \rangle \cdot \langle d \rangle}{\langle v \rangle} = \frac{\langle F \cdot L^{-2} \rangle \cdot \langle L \rangle}{\langle L \rangle \cdot \langle T^{-1} \rangle} = \langle F \rangle \cdot \langle L^{-2} \rangle \cdot \langle T \rangle = \langle p \rangle \cdot \langle T \rangle$$

Cum în S.I. presiunea se măsoară în *Pa*, unitatea fundamentală de vâscozitate este:

$$\langle \mu \rangle = \langle Pa \rangle \cdot \langle \text{sec} \rangle$$

În practică unitatea de măsură este 1 Poise definită ca vâscozitatea apei la 20°C. Relația dintre cele două mărimi este:

$$1 \text{ Poise} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{sec}$$

Dimensiunile vâscozității cinematice rezultă din relația de definiție (1.23):

$$\langle \nu \rangle = \frac{\langle \mu \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{\text{Pa}\cdot\text{sec}}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}} = \frac{\text{N}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{sec}}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{m}\cdot\text{sec}^{-2}\cdot\text{sec}}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}} = \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

În practică este folosit un submultiplu al unității de măsură în S.I.:

$$1 \text{ Stokes} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$$

1.3 Curgerea laminară și turbulentă

Simpla observație a curgerii fluidelor la scară extinsă conduce la diferențierea a două tipuri mișcări:

- *Miscare laminară* în care particulele de fluid alcătuiesc strate (*lamine*) care alunecă unele față de altele. La scară mare, extinsă, aceste strate se conservă și nu are loc un transfer de particule între ele. Un traser (un colorant) introdus într-un strat se mișcă convectiv doar în cadrul acestuia.

- *Mișcarea turbulentă* este caracterizată prin mișcarea haotică a particulelor și amestecarea acestora în timpul curgerii. În acest caz un traser introdus într-un strat pune în evidență trecerea particulelor în stratele vecine, precum și traectoriile circulare ale acestora.

În mișcarea laminară accelerațiile sunt mici pe când în cazul mișcării turbulente accelerațiile sunt mult mai mari, datorită schimbării direcțiilor particulelor.

Forțele predominante în cazul curgerii laminare sunt forțe de frecare. Valorile mici ale accelerației fac neglijabile forțele de inerție în cazul mișcării laminare.

Datorită schimbării direcțiilor de mișcare ale particulelor, în mișcarea turbulentă accelerațiile și implicit forțele de inerție nu mai pot fi neglijabile.

Raportul acestor două tipuri de forțe (inerție și vâscozitate) este caracterizat de un număr adimensional - numărul Reynolds. Avem:

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{M \cdot a}{\tau \cdot A} = \frac{\langle M \rangle \cdot \langle v^2 \rangle \cdot \langle L \rangle^{-1}}{\langle \mu \rangle \cdot \langle \frac{dv}{dy} \rangle \cdot \langle L \rangle^2} = \frac{\langle \rho L^3 \rangle \cdot \langle v^2 \rangle \cdot \langle L \rangle^{-1}}{\langle \mu \rangle \cdot \langle v \rangle \cdot \langle L \rangle} \\ &= \frac{\langle \rho \rangle \cdot \langle v \rangle \cdot \langle L \rangle}{\mu} \end{aligned} \quad (1.24)$$

În relația precedentă am notat cu:

Λ : suprafața de control a stratelor de fluid

$\langle v \rangle$: viteza medie a fluidului

L : lungimea medie a traectoriei particulei.

Experiența arată că există o valoare critică a numărului lui Reynolds pentru care are loc trecerea de la regim laminar la regim turbulent de curgere.

1.4 Tensiunea superficială

Rezultanta forțelor intermoleculare are valoare și orientare diferită în funcție de poziția moleculei. Astfel o particulă din interiorul unui lichid este supusă forțelor de coeziune (atracție) datorată tuturor particulelor adiacente: acestea sunt orientate în toate direcțiile și se echilibrează reciproc iar rezultanta lor este nulă. O moleculă din interiorul lichidului este deci liberă de orice legătură cu moleculele adiacente și din acest punct de vedere comportamentul lichidului este identic cu cel al gazului (Figura 1.6a).

Pentru o moleculă situată la suprafața de separație lichid - gaz (Figura 1.6b) rezultanta forțelor de coeziune lichid - gaz are valoarea mult mai mică decât rezultanta forțelor de coeziune lichid - lichid.

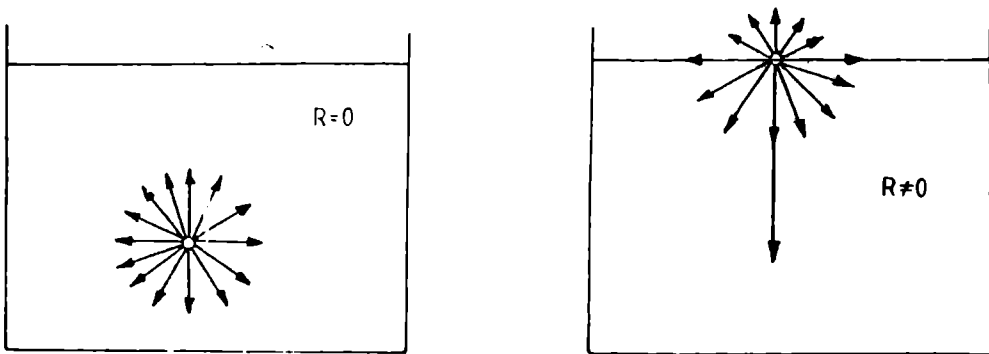


Figura 1.6: Rezultanta forțelor intermoleculare pentru o moleculă din interior (a) și pentru o moleculă de la suprafața de contact (b)

Din această cauză moleculele situate la suprafața unui lichid sunt supuse unei forțe de coeziune având modulul diferit de zero, orientată perpendicular pe suprafață, în spre interiorul lichidului. Pentru a deplasa o moleculă la suprafață este deci necesar un lucru mecanic rezultat efectuat împotriva acestei forțe.

În consecință la suprafața de contact a unui lichid cu o altă suprafață se formează un strat superficial ale cărui molecule au o energie potențială egală numeric cu lucrul mecanic al forțelor de coeziune superficiale.

O măsură a acestei energii este *tensiunea superficială* σ a unui lichid care este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a aduce molecula din interior pentru a forma o arie unitară a stratului superficial.

Fie w acest lucru mecanic și fie A suprafața stratului superficial. Conform definiției date avem:

$$\sigma = w/A [J/m^2] \text{ sau } [N/m] \quad (1.25)$$

Cum orice suprafață având energie liberă se contractă, moleculele din stratul superficial sunt supuse unor forțe tangențiale la suprafața de separație, numite forțe de tensiune superficială.

Cu alte cuvinte moleculele din stratul superficial se comportă ca și cum ar forma o membrană elastică subțire, a cărei grosime este de ordinul de mărime al razei moleculare.

În orice punct al stratului superficial acționează forțele de tensiune superficială orientate tangențial la acest strat și normal pe orice contur imaginar trasat pe această suprafață.

De aici rezultă o a doua definiție a tensiunii superficiale σ : ea este forța care acționează asupra unității de lungime a curbei care mărginește stratul superficial. Atunci avem:

$$\sigma = dF_t / dl \quad [N/m] \quad (1.26)$$

unde dF_t este forța elementară care acționează asupra elementului de lungime.

Din definiția dată rezultă că tensiunea superficială dintre două fluide depinde în primul rând de natura acestora, fiind o constantă de material.

Fiind un efect al forțelor intermoleculare, tensiunea superficială este o funcție de temperatură: cu cât temperatura crește, energia potențială a moleculei scade și implicit, scade și tensiunea superficială.

1.5 Unghiul de contact. Aderența

Fie două fluide imiscibile L și G în contact cu o suprafață solidă și să notăm cu σ_{SL} și σ_{SG} tensiunea superficială între cele două fluide și solid, respectiv cu σ_{LG} tensiunea superficială dintre cele două fluide.

Unghiul de contact θ este definit ca unghiul dintre suprafața solidului și tangenta la interfața LG dintre cele două fluide, orientat înspre fluidul mai dens.

Echilibrul pentru suprafața AB (Figura 1.7) implică:

$$\sigma_{LG} \cos \theta + \sigma_{LS} = \sigma_{GS}$$

sau:

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{GS} - \sigma_{LS}}{\sigma_{LG}} \quad (1.27)$$

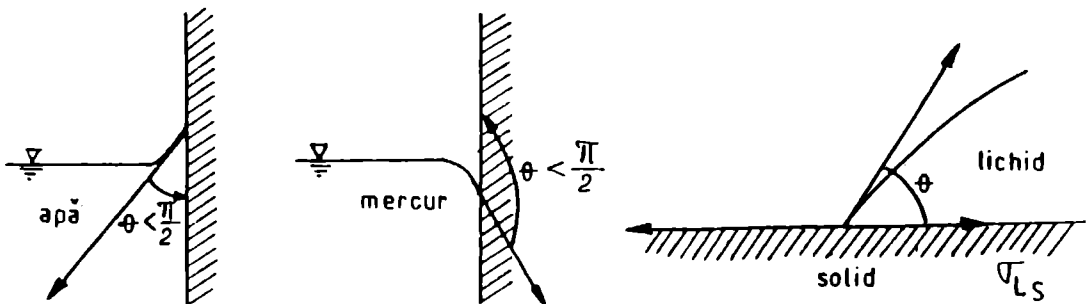


Figura 1.7: Unghiul de contact

Din relația (1.27), datorată lui Young, rezultă că echilibrul este posibil numai dacă:

$$\frac{\sigma_{CS} - \sigma_{LS}}{\sigma_{LG}} < 1 \quad (1.28)$$

În cazul în care această condiție de echilibru nu este îndeplinită, lichidul L se va împrăști pe suprafața solidă.

La echilibru dacă $\theta < 90^\circ$ se spune că fluidul L este aderent și "udă" solidul S . Invers, dacă $\theta > 90^\circ$ fluidul L este neaderent la solidul S .

1.6 Capilaritatea. Relația Laplace

Vom considera un element de menisc având laturile dx și dy și razele medii de curbură r_1 și r_2 .

Stratul superficial este supus acțiunii presiunii p_L a lichidului, respectiv p_G a gazului, diferite între ele (Figura 1.8). Diferența lor se numește *presiune capilară* p_C și avem:

$$p_C = p_G - p_L \quad (1.29)$$

Condiția de echilibru a acestui element se reduce la anularea sumei componentelor verticale (Figura 1.9):

$$p_C dx dy = 2\sigma dy \sin\alpha + 2\sigma dx \sin\beta$$

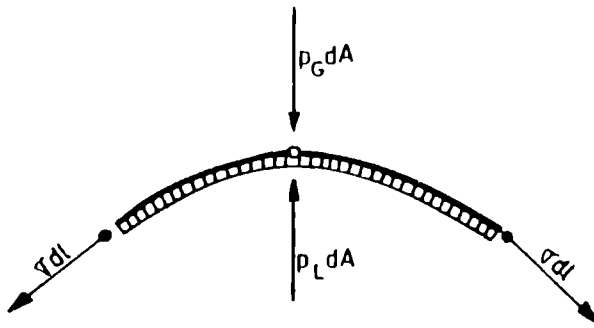


Figura 1.8: Presiunea capilară

Cum $\sin\alpha = dx/2R_1$ și $\sin\beta = dy/2R_2$ obținem în final relația Laplace:

$$p_C = p_G - p_L = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.30)$$

În cazul în care meniscul are formă sferică relația precedentă se simplifică și avem:

$$p_C = p_G - p_L = \sigma/2R \quad (1.31)$$

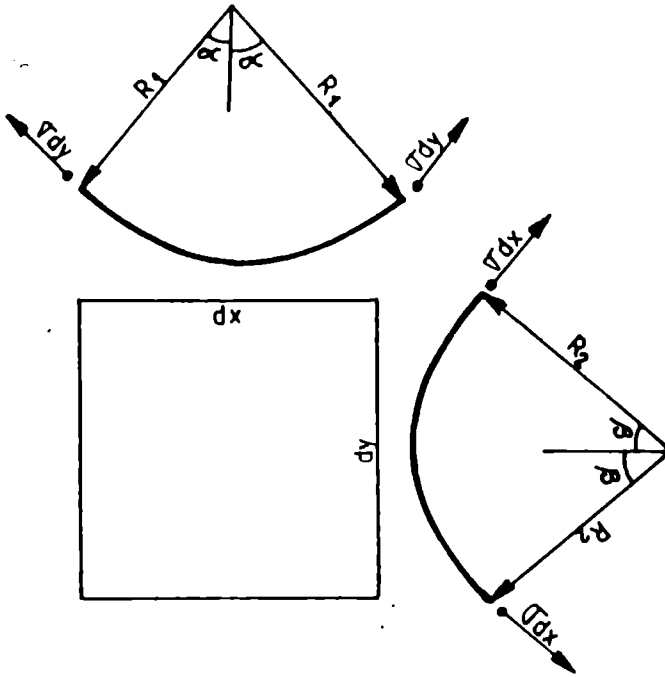


Figura 1.9: Echilibrul unui element de menisc.

Dacă $p_G > p_L$ atunci meniscul are concavitatea orientată în sus iar dacă procesul are loc într-un tub subțire, de rază R , denumit tub capilar, lichidul se ridică în sus, deasupra suprafeței libere din vas. Înălțimea la care se ridică lichidul se obține din condiția de echilibru (Figura 1.10). Forțele care acționează asupra coloanei de lichid de înălțime h sunt greutatea acesteia $G = \pi^2 h \rho g$ și forțele de tensiune superficială a căror componentă verticală este $2\pi \sigma \cos \alpha$. Condiția de echilibru impune egalitatea acestor forțe. Deducem de aici expresia înălțimii coloanei de lichid într-un tub capilar:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho r} \quad (1.32)$$

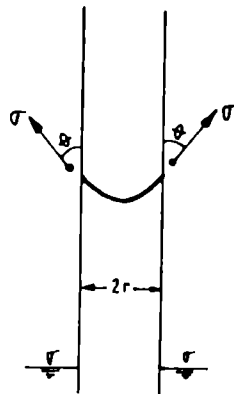


Figura 1.10: Înălțimea capilară

Subliniem că în relația precedentă am notat prin r raza meniscului și nu raza tubului capilar. Fie ρ această rază. Din figura 1.10 rezultă că $\rho = r \cos\theta$, unde θ este unghiul pe care îl face tangenta la menisc cu peretele vertical al tubului. În funcție de valorile lui θ deosebim următoarele cazuri:

. $\theta = 0$: aderență perfectă și $\rho = r$.

. $0 \leq \theta < 90^\circ$; meniscul are concavitatea orientată în sus și are loc *ascensiunea* coloanei de fluid în tubul capilar. Este cazul sistemului *apă - aer*.

. $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$; meniscul este orientat cu concavitatea în jos. Are loc procesul de *depresiune* capilară: fluidul din tub coboară sub nivelul avut în vasul adiacent. Este cazul sistemului *mercur - aer*.

. $\alpha = 180^\circ$: aderența lichidului este nulă și $r = -\rho$.

Dacă echivalăm porii rocilor cu un sistem de tuburi capilare de diferite raze atunci procesele capilare reprezintă mecanismul principal al curgerii apei în zona nesaturată. Măsurătorile arată că pentru apă și cuarț $\theta \approx 5^\circ$. Aderența apei este aproape perfectă și cum $\rho \approx r$, meniscul poate fi echivalat cu o semisferă

2. STATICA FLUIDELOR

Echilibrul fluidelor este caracterizat prin absența oricărei mișcări relative între particulele care îl alcătuiesc. Datorită structurii lor, fluidele nu pot prelua prin contact direct forțele ci numai prin intermediul unei suprafețe. Forțele exterioare sunt caracterizate prin presiuni când atunci când acționează asupra suprafețelor sau sunt forțe masice atunci când acționează asupra volumului de fluid.

În cazul unui fluid în echilibru eforturile tangențiale sunt nule și atunci vâscozitatea nu intervine în ecuațiile de echilibru. În cazul în care fluidul este omogen și este supus numai acțiunii forței gravitaționale, ecuația hidrostaticii exprimă faptul că diferența de presiune dintre două puncte oarecare este constantă. Aplicații imediate ale acestei ecuații sunt principiile lui Pascal și Arhimede.

2.1. Forțe care acționează în fluid.

Să considerăm un volum de control dV mărginit de suprafața dS . Asupra acestuia acționează două tipuri de forțe:

- *Forțe masice* care acționează la distanță și sunt datorate unor câmpuri exterioare. Exemplul tipic de forțe masice este gravitația. Conform denumirii aceste forțe sunt proporționale cu masa elementului și se aplică în centrul de masă al volumului de control. Fie $g(g_x, g_y, g_z)$ intensitatea câmpului exterior. Atunci forța masică aplicată volumului dV este:

$$\vec{F} = \rho g dV \quad (2.1)$$

- *Forțe de legătură*, de suprafață caracterizează acțiunea fluidului din exteriorul volumului de control asupra celui din interiorul acestuia.

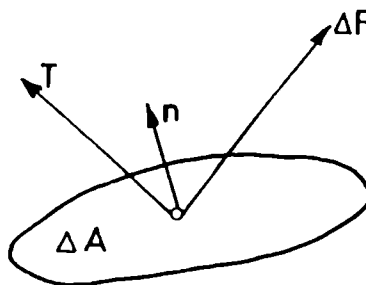


Figura 2.1: Forțe de legătură pe suprafața elementară dA

Din definiția dată rezultă că forțele de legătură se transmit prin intermediul suprafeței prin intermediul suprafeței dS .

Dacă vom considera o suprafață elementară ΔA (Figura 2.1) forțele de legătură au o rezultantă ΔF și un moment ΔM . Cum elementul de suprafață este foarte mic forțele de legătură pot fi considerate uniform distribuite având deci momentul nul.

Conform ipotezei continuității atunci când suprafața ΔA tinde către zero limita:

$$\bar{F} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} \quad (2.2)$$

există și definește forța de legătură într-un punct oarecare.

Fără a afecta generalitatea concluziei, să considerăm o problemă plană și fie un element oarecare ds de normală n asupra căruia acționează tensiunea T_n . Să considerăm desemeni dx și dy proiecțiile elementului ds pe cele două axe. Să notăm cu T_x și T_y tensiunile care acționează pe aceste elemente. (Figura 2.2).

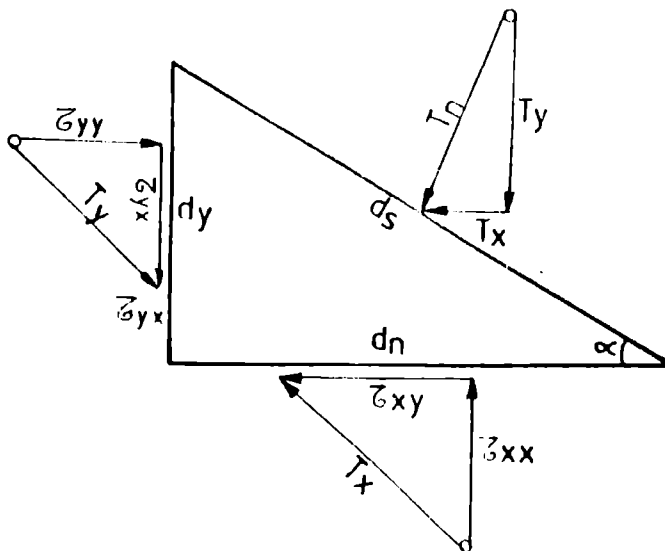


Figura 2.2: Starea de eforturi în jurul unui volum elementar de fluid

Se poate demonstra că starea de tensiune dintr-un punct este univoc determinată dacă se cunosc tensiunile T_x și T_y pe două suprafețe perpendiculare din jurul punctului respectiv. Cu alte cuvinte putem exprima tensiunea T_n în funcție de T_x și T_y . Această relație se obține simplu scriind echilibrul volumului de control. Notând cu α și β cosinușii directori ai normalei n avem:

$$\begin{aligned}\bar{T}_n ds &= \bar{T}_x dx + \bar{T}_y dy \\ dx &= ds \cdot \alpha \\ dy &= ds \cdot \beta\end{aligned}\tag{2.3}$$

sau:

$$\bar{T}_n = \alpha \bar{T}_x + \beta \bar{T}_y\tag{2.4}$$

Dacă τ_{xx} , τ_{xy} și τ_{yy} , τ_{yx} respectiv T_{nx} și T_{ny} sunt componentele tensorilor T_x , respectiv T_y pe cele două axe avem în definitiv:

$$\begin{aligned}T_{nx} &= \alpha \tau_{xx} + \beta \tau_{xy} \\ T_{ny} &= \alpha \tau_{xy} + \beta \tau_{yy}\end{aligned}\tag{2.5}$$

În cazul tridimensional fie τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} componentele forțelor T_x sau mai general τ_i componentele tensiunii $T_i(i=x,y,z)$. Atunci starea de tensiune în punctul oarecare P este univoc definit de tensorul T de componente τ_{ij} .

Pentru o problemă plană starea de tensiune în jurul unui punct este univoc determinată de un tensor având componentele:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$$



Se poate demonstra că acest tensor este simetric, adică $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Rezultatul precedent poate fi ușor generalizat în cazul tridimensional unde starea de tensiune în jurul unui punct P este univoc definită de un tensor de ordinul doi τ_{ij} având componentele :

$$\begin{matrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{matrix} \quad (2.6)$$

Dacă în jurul punctului P vom considera un paralelipiped infinitezimal cu laturile dx , dy , dz , paralele cu axele de coordonate ale sistemului de referință, atunci componentele tensorului de eforturi sunt de două categorii:

- componente normale pe suprafețele paralelipipedului și care reprezintă termenii diagonali ai tensorului.

- componentele tangențiale reprezentate de celelalte componente ale tensorului: astfel componentele τ_{xz} reprezentând componenta tensorului orientată în lungul axei OZ de pe fața paralelipipedului care are normala exterioară orientată în lungul axei Ox .

Ca și în cazul problemei bidimensionale tensorul τ_{ij} este simetric în sensul că $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Dacă fluidul este în echilibru componentele tangențiale ale tensorului de eforturi sunt nule: presiunile sunt întotdeauna normale pe suprafața respectivă indiferent de orientarea acesteia.

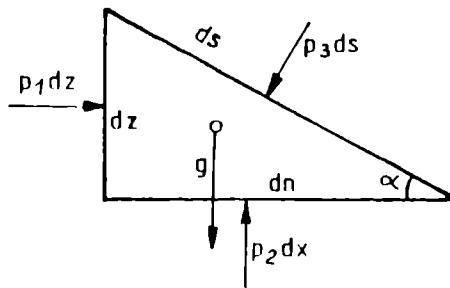


Figura 2.3: Forțe exercitate într-un volum de fluid în echilibru.

Să considerăm, pentru comoditatea demonstrației, o problemă plană și fie un element triunghiular de fluid în echilibru. Dacă p_1 , p_2 , p_3 , sunt presiunile exercitate de fluid pe fețele exterioare atunci (Figura 2.3) condiția ca rezultanta forțelor să fie nulă conduce la:

$$\begin{aligned} p_1 dz - p_3 ds \sin \alpha &= 0 \\ p_2 dx - 1/2 \rho g dx dz - p_3 ds \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

cum $dz = ds \sin \alpha$ și $dx = ds \cos \alpha$ cele două ecuații precedente devin, după simplificare:

$$p_1 = p_3$$

$$p_2 = p_3 + 1/2 \rho g dz \quad (2.8)$$

Ultima egalitate conduce la $p_2 \rightarrow p_3$ când dz tinde către zero . Deoarece un punct este adimensional această condiție este independentă întotdeauna astfel că :

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad (2.9)$$

Observații :

1^o Concluzia precedentă este valabilă independent de forma suprafeței . Spre exemplificare *Figura 2.4* prezintă distribuția presiunilor asupra pereților unui recipient și a unui corp imersat într-un fluid .

2^o Anularea componentelor tangențiale reduce tensorul eforturilor doar la componentele sale diagonale . Faptul că presiunea este independentă de orienterea suprafeței implică egalitatea termenilor diagonali .

În consecință pentru un fluid în echilibru tensorul eforturilor se reduce la un scalar .

3^o Faptul că eforturile tangențiale sunt nule este valabil doar pentru fluidele în repaus . Datorită vâscozității , atunci când fluidul este în mișcare apar forțe de frecare între stratele elementare, forțe care conduc la eforturi tangențiale .

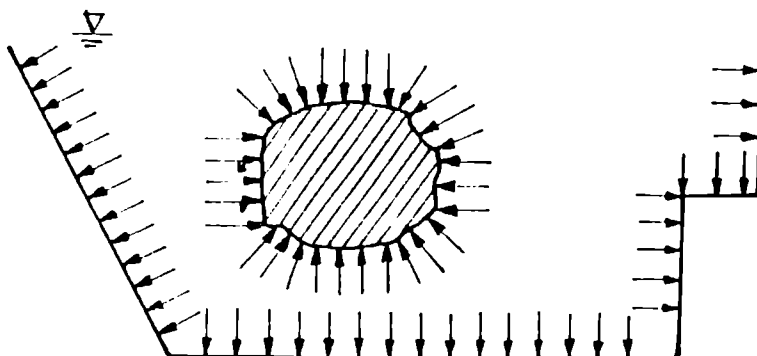


Figura 2.4: Distribuția presiunilor exercitate asupra suprafețelor aflate în contact cu un fluid în echilibru

2.2 Ecuațiile de echilibru ale fluidelor

Vom analiza echilibrul unui element infinitesimal cilindric având suprafața bazei dA și înălțimea dz (Figura 2.5a). Fie p , respectiv $p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$ presiunea ce acționează pe suprafețele de bază ale cilindrului.

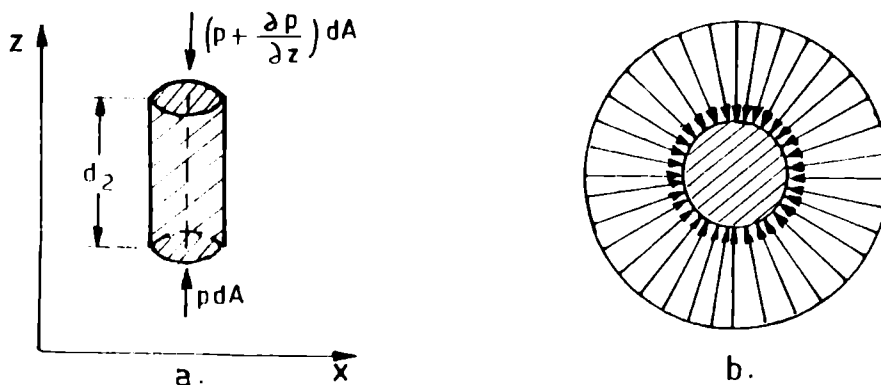


Figura 2.5: Echilibrul unui element infinitesimal de fluid

Presiunea fluidului fiind normală pe suprafață, forțele de presiune ce acționează pe suprafața laterală a cilindrului au rezultanta nulă (Figura 2.5 b). Pe de altă parte anularea rezultantei forțelor pe verticală conduce la :

$$-p dA - \rho g dA dz + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dA = 0 \quad (2.10)$$

sau, după simplificare :

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (2.11)$$

Acest rezultat poate fi ușor generalizat pentru un element infinitesimal paralelipedic de laturi dx , dy , dz centrat în jurul unui punct oarecare M al unui fluid în repaus. Dacă notăm cu $F(x,y,z)$ intensitatea forțelor masice, atunci ecuația precedentă devine :

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \rho Z = 0 \quad (2.12)$$

Ecuțiile pe celelalte două direcții au forme analoage , astfel echilibrul fluidului în orice punct este descris de sistemul de ecuații :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \rho X = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho Y = 0 \quad (2.13)$$

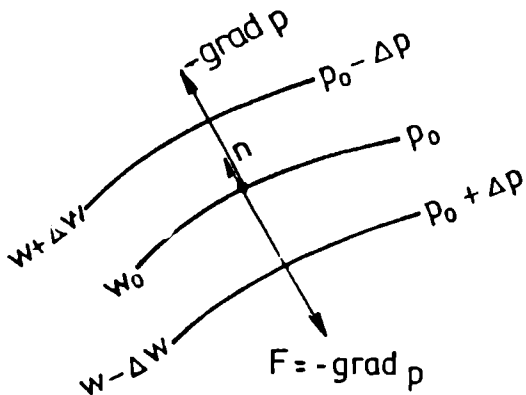
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \rho Z = 0$$

sau vectorial :

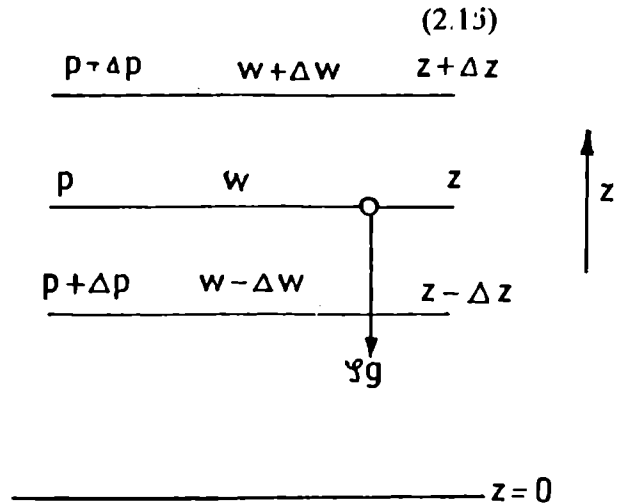
$$\text{grad } p - \rho \vec{F} = 0 \quad (2.14)$$

În cazul în care forțele masice derivă dintr-un potențial scalar W având $F = - \text{grad } W$ ecuația precedentă devine :

$$\text{grad } p + \rho \text{grad } W = 0 \quad (2.15)$$



a.



b.

Figura 2.6: Suprafețe echipotențiale într-un fluid în repaus.

Observații :

1^o Conform ecuației (2.15) în cazul unui fluid în echilibru avem două familii de suprafețe echipotențiale :

- suprafețe izobare $p = constant$

- suprafețele $W = constant$

În fapt aceste suprafețe se suprapun, direcțiile gradientilor făcând între ele un unghi de 180° (Figura 2.6) : deoarece gradientul este orientat în susul normalei la suprafața echipotențială atunci conform cu ecuația (2.15) normalele la cele două suprafețe coincid .

2^o Atât suprafețele echipotențiale $W = ct$. cât și izobarele sunt suprafețe de egală densitate . Dacă considerăm două asemenea suprafețe infinit vecine , distanța dintre ele fiind dn avem atunci :

$$gradW = \frac{\partial W}{\partial n} \bar{n} \quad (2.16)$$

$$gradp = \frac{\partial p}{\partial n} \bar{n}$$

unde \bar{n} este versorul normalei la echipotențială.Or în virtutea ecuației (2.15) putem scrie :

$$-\rho \frac{\partial w}{\partial n} dn = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.17)$$

sau

$$-\rho dw = dp \quad (2.18)$$

și

$$dw/dp = \rho = ct$$

În concluzie , când cele două suprafețe se suprapun , ele pot fi considerate ca suprafețe de egală densitate .

2.3 Ecuația fundamentală a hidrostatiei

Vom alege un referențial orizontal $z=0$ și fie un punct P situat la cota z . Dacă greutatea este singura forță masică, atunci potențialul gravitațional în punctul P este :

$$w = gz \quad (2.19)$$

În cazul unui fluid compresibil $\rho = ct$ și ecuația (2.15) poate fi pusă sub forma :

$$\text{grad} (p + \rho g z) = 0 \quad (2.20)$$

Integrând această ecuație în lungul unei curbe oarecare avem :

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z) = 0 \quad (2.21)$$

și:

$$p + \rho g z = ct \quad (2.22)$$

Denumită *ecuația fundamentală a hidrostatiei*, ecuația (2.22) implică faptul că mărimea $p + \rho g z$ este constantă în orice punct al unui fluid incompresibil aflat în echilibru sub acțiunea forței gravitaționale.

Observații

¹ În acest caz particular atât izobarele cât și echipotențialele gravitaționale ($w = ct$) sunt plane orizontale (Figura 2.6 b). Aceasta rezultă imediat din ecuația (2.22) în virtutea căreia :

$$z = \frac{ct - p}{\rho g} \quad (2.23)$$

Cum pentru o suprafață izobară $p=ct$ rezultă din (2.23) :

$$z = \frac{ct - p}{\rho g} = \text{constant}$$

Variațiile celor două mărimi sunt de sens contrar astfel încât ecuația (2.22) este verificată .

2^o Fie două puncte M și N situate la cotele z_M și z_N de referențialul ales (Figura 2.7)

Conform ecuației (2.22) avem :

$$p_M + \rho g z_M = p_N + \rho g z_M$$

și :

$$p_M - p_N = \rho g (z_N - z_M) = \rho g h \quad (2.24)$$

Diferența de presiune între două puncte ale unui fluid incompresibil aflat în echilibru nu depinde decât de diferența h dintre cotele celor două puncte .

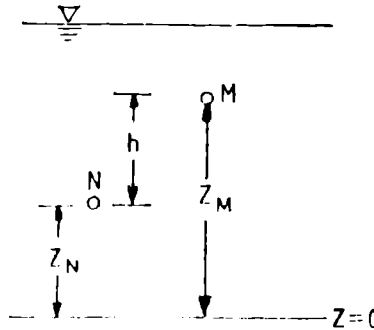


Figura 2.7

Consecința imediată a ecuației (2.22) este principiul lui Pascal : într-un fluid incompresibil variațiile presiunii se transmit integral în toată masa acestuia .

Fie Δp_N variația presiunii în punctul N . în virtutea ecuației (2.24) presiunea p_M devine :

$$p'_M = \rho g h + p_N + \Delta p_N$$

astfel încât variația Δp_M a problemei hidrostatiei în punctul M devine :

$$\Delta p_M = p'_M - p_M = \rho g h + p_N + \Delta p_N - \rho g h - p_N = \Delta p_N \quad (2.25)$$

3^o Deoarece suprafețele izobare sunt suprafețe de densitate constantă suprafața de separație a două fluide incompresibile de densitate diferită este un plan orizontal , fluidul mai ușor fiind deasupra celui mai greu .

Cum suprafața liberă a unui fluid este o izobară ($p = \text{presiunea atmosferică} = \text{constant}$) rezultă că această suprafață este și ea un plan orizontal .

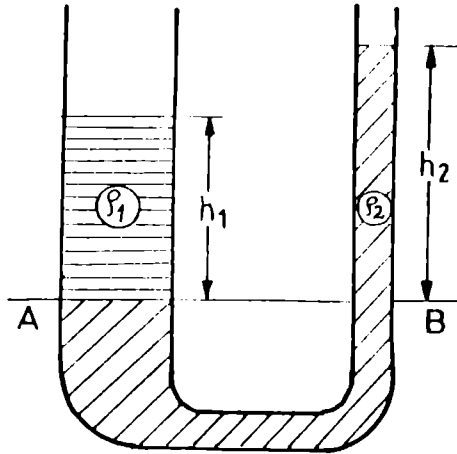


Figura 2.8: Principiul vaselor comunicante.

O consecință imediată a acestei observații este principiul vaselor comunicante . Fie două vase comunicante de secțiuni diferite S_1 și S_2 (Figura 2.8) . Cum suprafața AB de separație a celor două fluide este o izobară avem :

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

sau :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.26)$$

☞ Dacă $\rho_1 = \rho_2$ evident $h_1 = h_2$ și :

În două vase comunicante un fluid omogen și incompresibil se ridică întotdeauna la aceeași înălțime indiferent de secțiunea acestora .

2.4. Măsurarea presiunii hidrostatice .

Dacă într-un punct oarecare M al unui vas în care se află un fluid în echilibru se practică un orificiu și se pune în legătură cu un tub subțire deschis , atunci , dacă se neglijează presiunea atmosferică , presiunea dată de coloana de fluid din tub echilibrează presiunea fluidului c in recipient din orice punct al planului care trece prin orificiu (Figura 2.9) .

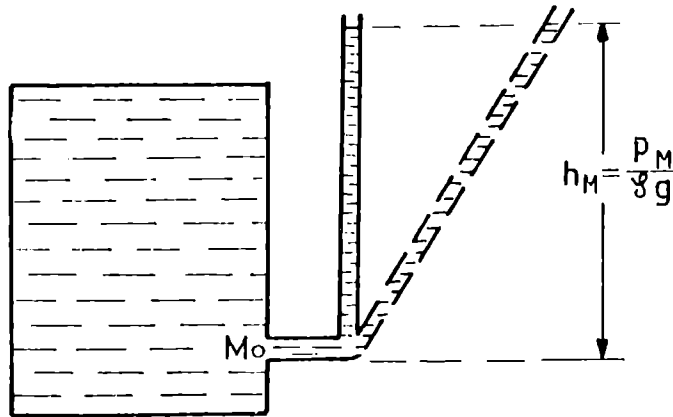


Figura 2.9: Tub piezometric

Înălțimea h a nivelului din tub se numește nivel piezometric și este independent de înclinarea tubului . Tubul însuși se numește *tub piezometric* .

Dacă vom introduce mai multe tuburi piezometrice (Figura 2.10) atunci , conform ecuației fundamentale a hidrostaticii nivelul piezometric H măsurat de la un singur referențial este același chiar dacă presiunile sunt diferite .

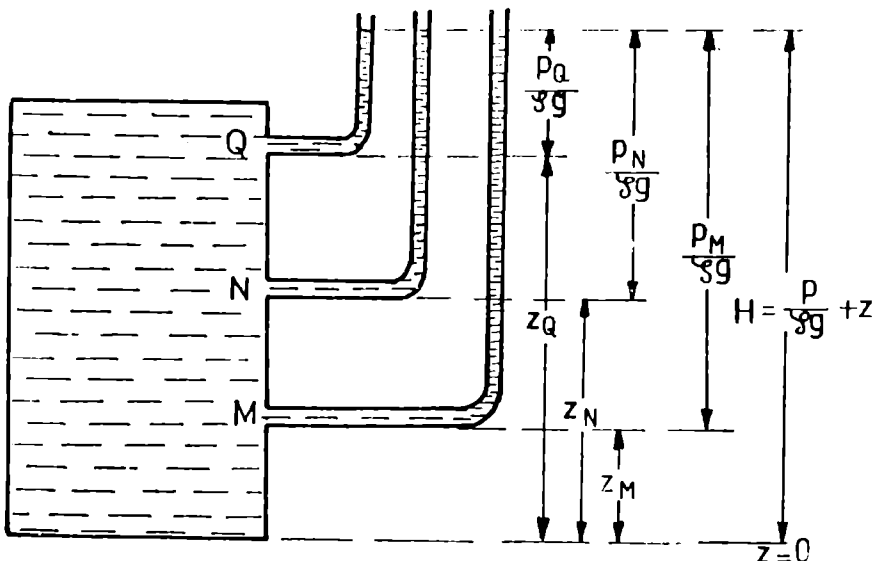


Figura 2.10: Sarcina piezometrică într-un fluid în echilibru

Neglijarea presiunii atmosferice implică faptul că această presiune este considerată ca presiune de referință . În fapt , înălțimea coloanei de fluid din piezometru este o măsură a diferenței dintre presiunea fluidului și presiunea atmosferică . Avem conform relației (2.22) :

$$p_0 + \rho g z = p_M$$

și :

$$z = \frac{p_M - p_0}{\rho g} \quad (2.27)$$

unde p_0 este presiunea atmosferică .

Presiunea măsurată de tubul piezometric este o presiune relativă în sensul că depinde de presiunea de referință aleasă . Cele mai multe sisteme de măsură consideră presiunea atmosferică drept presiune de referință

($p_0 = 0$) , sistemul măsurând , în fapt , diferența dintre presiunea absolută a fluidului și presiunea atmosferică . Presiunea absolută se măsoară cu un barometru care este un tub piezometric închis astfel încât deasupra coloanei de fluid se află vid .(*Figura 2.11*)

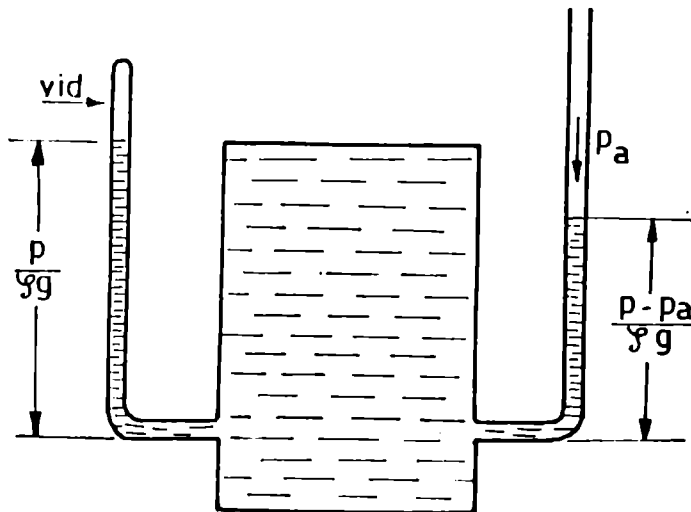


Figura 2.11: Presiune manometrică și presiune barometrică.

Unități de presiune

În SI, unitatea de presiune, pascalul (Pa) se deduce din relația de definire a acesteia (2.1) :

$$1Pa = 1N/m^2$$

Unitatea din sistemul tehnic, atmosfera, este definită de presiunea aerului la nivelul mării în condiții normale de presiune. Experiența arată că această presiune este echilibrată de o coloană de mercur având înălțimea de 760 mm. Avem deci :

$$1atm = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg} = 13,6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{sec^2} \cdot 0,76m = 1,01 \cdot 10^5 Pa$$

O altă unitate de măsură din sistemul tehnic, *harr*-ul este foarte aproape de atmosferă. În general avem :

$$1atm = 1bar = 10^5 Pa$$

2.5. Aplicații.

1. Rezultanta forțelor de presiune pe o suprafață plană.

Fie (Figura 2.12) o suprafață plană imersată de arie A și să considerăm un element infinitesimal de arie dA aflată la adâncimea h . Forța elementară dF exercitată normal pe acest element este :

$$dF = \rho g h dA = \rho g l \sin \alpha dA \quad (2.28)$$

unde l este distanța de la punctul de sprijin O la elementul infinitesimal considerat.

Deoarece forțele exercitate asupra tuturor elementelor infinitezimale sunt paralele, rezultanta lor se obține prin integrare :

$$F = \int dF = \int_A \rho g l \sin \alpha dA = \rho g \sin \alpha \int_A l dA \quad (2.29)$$

Integrala din ecuația (2.29) reprezintă momentul static I_0 al suprafeței A față de axa OO' :

Avem:

$$I_C = \int_A l dA = l_C A \quad (2.30)$$

unde l_C este brațul centrului de masă al suprafeței A . Cum $l_C \sin \alpha = h_C$, unde h_C este adâncimea centrului de masă, obținem pentru rezultantele forțelor de presiune:

$$F = \rho g h_C A \quad (2.31)$$

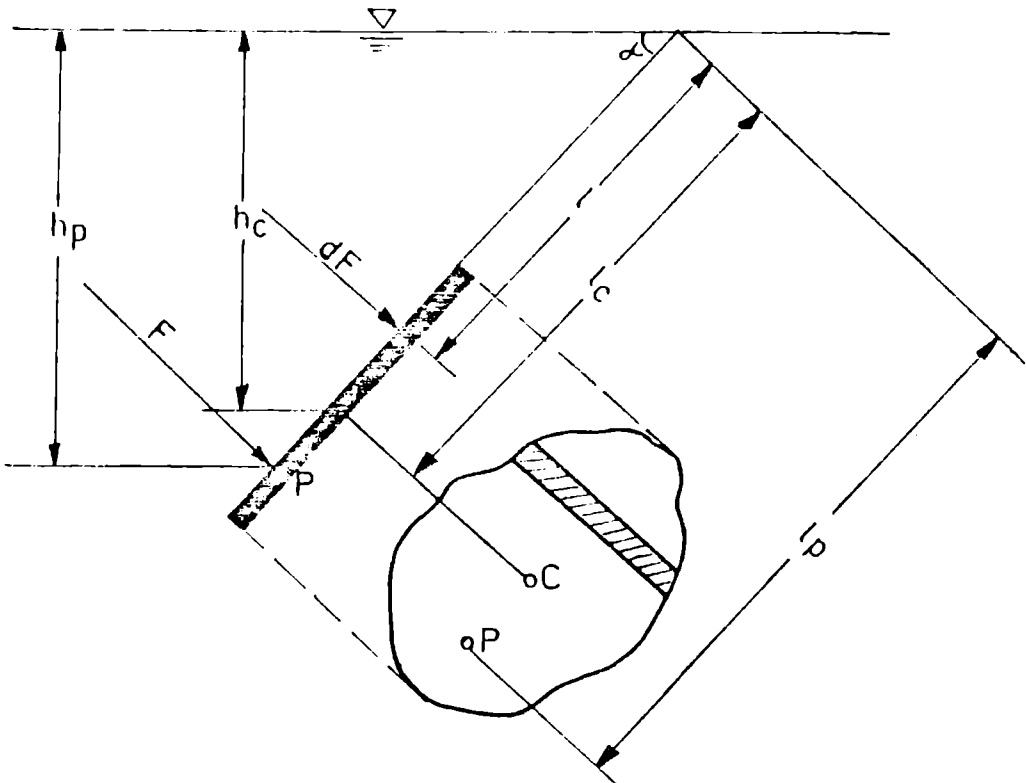


Figura 2.12: Forțe exercitate de fluid pe suprafețe imersate plane

Forța exercitată asupra unei suprafețe plane imersate este egală cu presiunea exercitată de o coloană de apă având înălțimea egală cu adâncimea centrului de masă, înmulțită cu aria suprafeței respective.

Poziția punctului de aplicație implică calculul momentului rezultantei. Față de punctul O momentul dat de forța de presiune exercitată asupra elementului infinitezimal are expresia :

$$dM_0 = \rho g l^2 dA \sin \alpha \quad (2.32)$$

Integrând obținem pentru momentul resultant :

$$M_0 = \rho g \sin \alpha \int_A l^2 dA = \rho g \sin \alpha I_0 \quad (2.33)$$

în relația (2.33) am notat prin : $I_0 = \int_A l^2 dA$ momentul static de ordinul doi al suprafeței A , față de punctul O . Fie l_p brațul forței rezultante. Avem atunci :

$$M_0 = F l_p = \rho g I_0 \sin \alpha \quad (2.33)$$

Deci punctul de aplicație al forței de presiune se găsește la distanța :

$$l_p = \frac{\rho g I_0 \sin \alpha}{F} = \frac{I_0}{I_C A} \quad (2.34)$$

Conform teoremei Huyghens avem :

$$I_0 = I_C + I_C A$$

și relația (2.34) devine :

$$l_p = l_C + I_0 / I_C A \quad (2.35)$$

După cum se observă poziția punctului de aplicație l_p al forței de presiune este întotdeauna sub centrul de masă .

2.6. Principiul lui Arhimede

Vom considera un corp de formă oarecare imersat într-un fluid (*Figura 2.13*) și să izolăm o porțiune de fluid care “îmbracă” acest corp .

Fie F_1 reacțiunea dată de corp pe fața superioară ABC a fluidului și respectiv F_2 reacțiunea dată de corp pe fața inferioară .

Cum cele două porțiuni de fluid sunt în echilibru rezultanta forțelor care acționează asupra fiecăruia trebuie să fie nulă și avem :

$$F_1 - G_1 - p_1 A = 0$$

(2.36)

$$F_2 + G_2 - p_2 A = 0$$

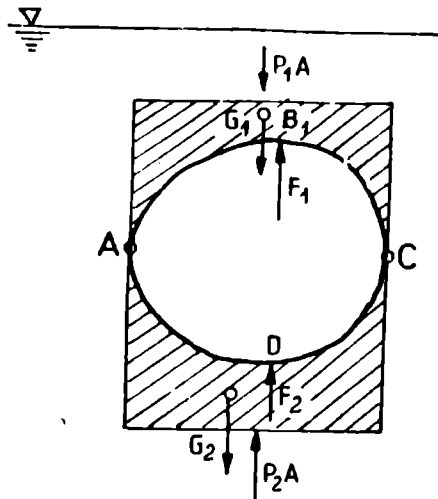


Figura 2.13: Diferențe de presiune hidrostatică exercitate pe suprafața unui corp imersat de formă oarecare.

Scăzând aceste două ecuații obținem :

$$R = F_1 - F_2 = (p_1 - p_2)A - (G_1 + G_2) \quad (2.37)$$

În ecuația (2.37) am notat cu :

$R = F_1 - F_2$ - rezultanta forțelor exercitate de către fluid asupra corpului imersat .

Conform ecuației fundamentale a hidrostaticii primul termen din dreapta al ecuației (2.37) este :

$$(p_1 - p_2)A = \rho_0 g h A \quad (2.38)$$

unde h este înălțimea volumului de fluid și ρ_0 densitatea acestuia. Acest termen nu reprezintă altceva decât greutatea acestui volum de fluid .

Întregul membru drept al ecuației (2.37) reprezintă greutatea volumului de fluid deslocuit de corpul imersat . Sintetizând , principiul lui Arhimede poate fi formulat astfel :

Un corp scufundat într-un fluid este împins în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit.

Fie m masa corpului și ρ densitatea acestuia . Conform principiului lui Arhimede , avem :

$$R - mg = ma$$

unde R este masa arhimedică iar a este accelerația corpului . În cazul în care corpul este imersat, volumul dezlocuit este egal cu volumul V al corpului și avem :

$$\rho_0 \frac{m}{\rho} g - mg = ma$$

și :

$$a = g \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \quad (2.39)$$

În funcție de raportul densităților desprindem următoarele cazuri :

a. $\rho > \rho_0 \quad a < 0$

Corpul coboară până la fundul vasului și are greutatea aparentă :

$$\Delta G = mg - \frac{m}{\rho_0} \rho g = mg \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (2.40)$$

b. $\rho < \rho_0 \quad a > 0$

Corpul urcă având accelerația dată de ecuația (2.39).

c. $\rho = \rho_0 \quad a = 0$

În acest caz corpul plutește .

3. CINEMATICA FLUIDELOR

Ca și în mecanica solidului, cinematica fluidelor descrie caracteristicile mișcării acestora -- deplasări, viteze, accelerații - fără a lua în considerație forțele care pun fluidul în mișcare. Într-o primă abordare fluidul poate fi echivalat cu un sistem de puncte materiale. Mișcarea fiecărei particule va fi caracterizată atunci de vectorul ei de poziție, viteza și accelerația instantanee, etc. Datorită continuității sale, fluidul poate fi echivalat cu un sistem cu un număr infinit de grade de libertate. Acest al doilea mod de descriere a mișcării introduce noțiunea de câmp. Legătura dintre cele două abordări este dată de derivata totală a mărimii analizate. Sunt introduși apoi parametrii ce descriu global mișcarea: debite, circulație, etc.

3.1. Variabile Lagrange și Variabile Euler

Există două moduri de descriere a mișcării fluidelor :

În abordarea Lagrange a problemelor de cinematică fluidul este echivalat cu un sistem de puncte materiale : Întregul domeniu ocupat de fluid este discretizat într-un număr de particule iar scopul cinematicii este de a analiza evoluția în timp a caracteristicilor particulelor individuale :traietorie, viteză, accelerație, densitate, temperatură, etc.

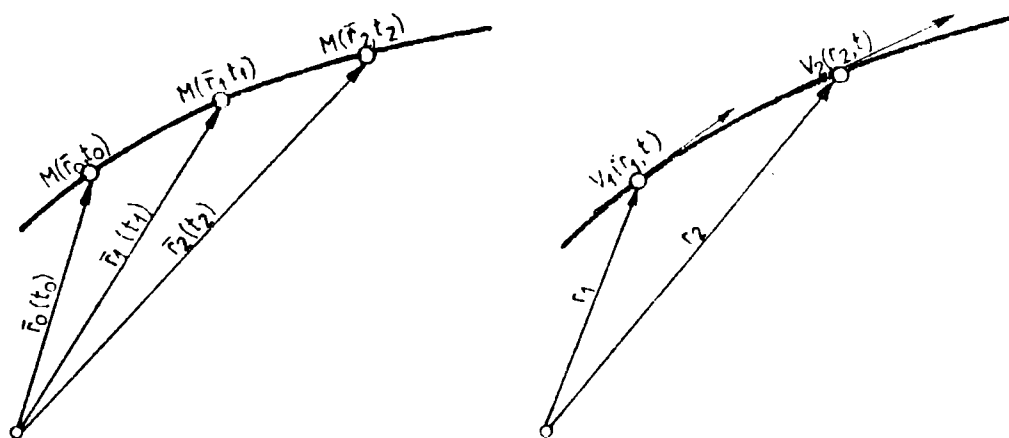


Figura 3.1: Vectorii de poziție (a) și vitezele (b) în cazul descrierii lagrangeene a mișcării fluidelor.

Față de un referențial oarecare particulele se diferențiază prin poziția lor inițială definită de vectorul de poziție $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$. Fie atunci o particulă M la un moment oarecare t , (Figura 3.1a) poziția ei este definită de vectorul de poziție $\vec{r}(x, y, z)$. Mișcarea fluidului este univoc determinată dacă definim coordonatele x, y, z în funcție de poziția inițială (x_0, y_0, z_0) și timpul t al tuturor particulelor. Aceasta revine la determinarea ecuației vectoriale :

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) \quad (3.1)$$

Fizic această descriere a mișcării este pur newtoniană și atunci, deoarece două particule rămân tot timpul distincte, există posibilitatea de a determina poziția lor inițială prin simpla inversare a direcțiilor vitezelor, ceea ce revine la determinarea funcției :

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

Variabilele mișcării sunt, conform ecuației (3.1), poziția inițială a particulelor individuale și timpul t . Astfel pentru un r_0 dat și un t oarecare obținem traiectoria particulei în cauză iar pentru r_0 variabil și t constant determinăm volumul ocupat de fluid la acel timp.

Ținând seamă de modul de descriere a mișcării, orice proprietate a fluidului (temperatură, densitate, etc.) trebuie asociată fiecărei particule. Vom vorbi atunci de temperatura (densitatea) particulei descrisă de ecuația :

$$T = T[\vec{r}(\vec{r}_0, t)] \quad (3.3)$$

respectiv de ecuația:

$$\rho = \rho[\vec{r}(\vec{r}_0, t)] \quad (3.4)$$

Descrierea euleriană a mișcării urmărește un domeniu fix din spațiul prin care trece fluidul. Fiecare punct al acestui domeniu este caracterizat printr-un parametru al mișcării (viteză, accelerație) sau orice variabilă de stare a fluidului (densitate, temperatură, etc.).

Această abordare ia în considerație tocmai caracteristica fundamentală a fluidului, continuitatea acestuia, astfel încât fiecare parametru (viteză, densitate) este funcție continuă de punct (Figura 3.1b)

Descrierea euleriană introduce noțiunea de câmp (de viteză, temperaturi, etc.) iar variabilele mișcării sunt poziția punctului din domeniul considerat descrisă de vectorul de poziție \vec{r} , față de un referențial și timpul t . Astfel câmpul vitezelor este descris de funcția vectorială:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (3.5)$$

iar cea a temperaturii de funcția scalară:

$$T = T(r, t) \quad (3.6)$$

3.2. Caracterizarea câmpurilor.

În abordarea lagrangiană mișcarea unei particule este descrisă de traiectoria acesteia, definită de succesiunea pozițiilor ocupate de particula respectivă. Față de un referențial oarecare traiectoria particulei este descrisă de ecuația vectorială (3.1), ecuație care definește univoc mișcarea).

Mișcarea fluidului este cunoscută atunci când se determină traiectoriile tuturor particulelor care îl alcătuiesc.

În descrierea euleriană elementul esențial îl constituie câmpul vitezelor definit de ecuația vectorială :

$$\vec{v} = v(x, y, z, t) \quad (3.7)$$

Reprezentarea sugestivă a câmpului vitezelor este dată de liniile de curent care prin definiție reprezintă curbele tangente în orice punct vectorului viteză. Fie $d\vec{l}(dx, dy, dz)$ și $\vec{v}(u, v, w)$

elementul de arc al liniei de curent și respectiv vitezele fluidului într-un punct. Conform definiției avem:

$$\vec{v} \times d\vec{l} = 0 \quad (3.8)$$

Dezvoltând pe componente relația (3.8) obținem ecuația liniei de curent :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (3.9)$$

Cele două familii de curbe , liniile de curent și traiectoriile particulelor sunt în general distincte. Astfel traiectoriile sunt o imagine a direcțiilor vitezelor avute succesiv, în cursul timpului, de particulele fluidului, pe când liniile de curent reflectă distribuția vitezelor instantanee ale fluidului .

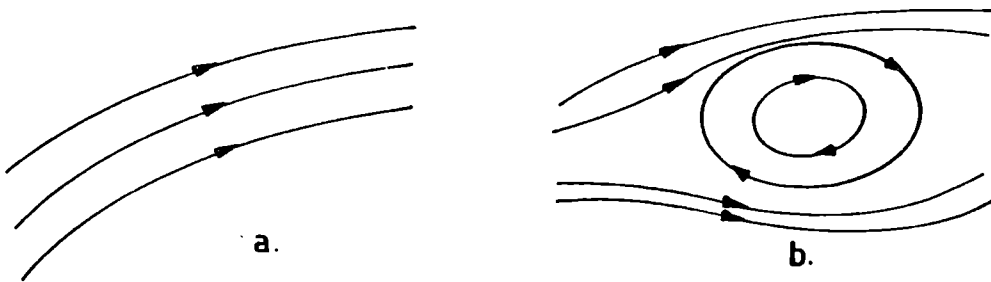


Figura 3.2: Liniile de curent. A: curgere laminară; b: curgere turbulentă.

În general liniile de curent sunt curbe deschise (curgere laminară) sau închise în cazul curgerii turbulente și pot corespunde traiectoriei unei particule (Figura 3.2). Există situații când în prezența unor obstacole liniile de curent se opresc în puncte de stagnare sau se intersectează în puncte singulare. Astfel în Figura 3.3a, linia $M'M$ se oprește în punctul M al obstacolului solid. În acest punct fluidul stagnează și viteza sa este nulă. În imediata sa vecinătate fluidul își continuă mișcarea, viteza sa fiind diferită de zero. În punctul N din figura 3.3b unde se extrage fluidul converg

toate liniile de curent. Spre deosebire de punctul de stagnare unde viteza este determinată ($v = 0$) în punctul singular N viteza fluidului poate avea o infinitate de valori

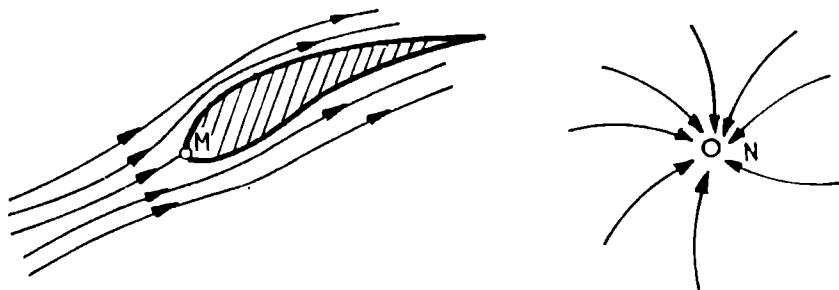


Figura 3.3: Punct de stagnare (M) și punct singular (N)

Un câmp este staționar sau regimul de mișcare este staționar dacă vitezele în fiecare punct, nu se modifică în timp. Invers, regimul de curgere este tranzitoriu când vitezele variază în timp.

În condițiile regimului staționar liniile de câmp nu se modifică pe când pentru un regim tranzitoriu acestea își schimbă poziția.

În cazul în care la un moment dat, vectorii viteză sunt egali atât în ce privește modulul cât și direcția, avem un câmp instantaneu uniform, sau în cazul în care vectorii viteză sunt egali pe toată durata procesului avem un câmp staționar uniform.

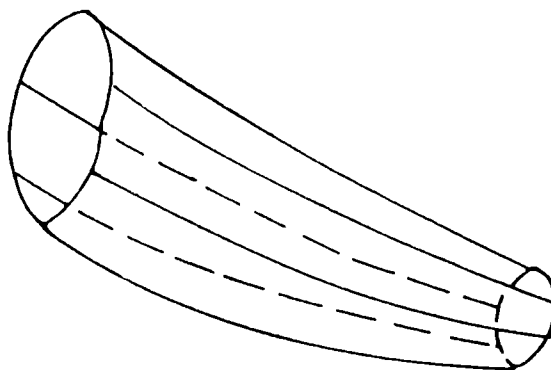


Figura 3.4: Tub de curent.

O noțiune derivată este tubul de curent (*Figura 3.4*) alcătuit din toate liniile de curent care se sprijină pe o curbă închisă. Caracteristica unui tub de curent este aceea de a avea suprafața exterioară impermeabilă .

Un tub subțire de curent este un tub de curent în care viteza este constantă în orice punct al secțiunii de sprijin .

3.3 . Viteze și accelerații

Diferența între cele două moduri de descriere a mișcării, lagrangeiană și euleriană, apare clar în definirea accelerației .

Deoarece în definirea lagrangeiană fluidul este echivalent cu un sistem de puncte materiale, viteza și accelerația unei particule sunt definite de primele două derivate ale vectorului de poziție. (*Figura 3.1 b*)

Avem deci :

$$\bar{v} = \left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_{r_0 = ct} \quad (3.10)$$

și respectiv :

$$\bar{a} = \left. \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right|_{r_0 = ct} \quad (3.11)$$

Vom considera acum o zonă a fluidului caracterizată printr-un câmp de viteze - descriere eulerian a mișcării - și să analizăm deplasarea unei anumite particule din punctul $M_1(x,y,z)$ unde viteza este $v_1(u, v, w)$ în punctul $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ unde viteza este $\bar{v}_2(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w)$ (*Figura 3.5*). Deplasarea se face în intervalul de timp Δt .

Atunci variația componentei pe direcția x a vitezei , când particula se deplasează din punctul M_1 în punctul M_2 se obține prin dezvoltarea în serie a componentei pe această direcție a vitezei \bar{v}_2 .

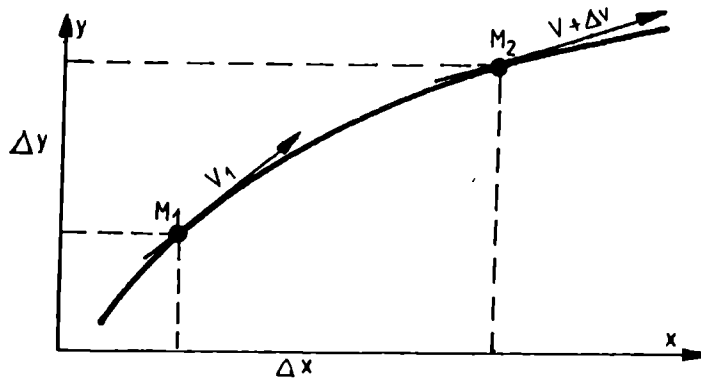


Figura 3.5

Dacă păstrăm numai primii termeni obținem :

$$u + \Delta u = v + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \quad (3.12)$$

sau ținând seama că

$$\Delta x = u \Delta t, \quad \Delta y = v \Delta t, \quad \Delta z = w \Delta t : \quad (3.13)$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} u \Delta t + \frac{\partial u}{\partial y} v \Delta t + \frac{\partial u}{\partial z} w \Delta t + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \quad (3.14)$$

Componenta pe direcția x , a_x , a accelerației se obține împărțind cu Δt și trecând la limită în relația (3.14) .

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.15)$$

Procedând în aceeași manieră obținem componentele pe celelalte două direcții ale accelerației

$$a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.16)$$

respectiv:

$$a_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.17)$$

Vectorial , avem în definitiv ,pentru accelerație :

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \quad (3.18)$$

Relația precedentă sugerează faptul că în descrierea euleriană a mișcării , variația în timp a vitezei unei particule are două componente :

- primul termen $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ exprimă variația vitezei particulei într-un punct fix din spațiu;
- al doilea termen $(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}$ reprezintă variația vitezei între două puncte vecine separate

prin

vectorul $\Delta \bar{r}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$;

În abordarea lagrangeiană, dacă viteza într-un punct a particulei este constantă, accelerația ei este nulă. Din contră, dacă în sistemul eulerian de descriere a mișcării avem un câmp de viteze staționare - atunci $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$ dar $(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \neq 0$. Rezultă că în sistemul eulerian chiar dacă avem un câmp staționar al vitezelor accelerația este diferită de zero, valoarea ei exprimând variația spațială a vitezei.

Numai în cazul câmpului de viteze uniform accelerația este nulă în abordare euleriană .

Pentru a păstra analogia formală cu sistemul lagrangian , a fost introdusă noțiunea de derivată totală pentru a caracteriza variația unei mărimi vectoriale \bar{B} într-un câmp de viteze \bar{v} :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} \quad (3.19)$$

Să considerăm acum o proprietate oarecare a fluidului , spre exemplu , temperatura acestuia descrisă de un câmp scalar $T(x,y,z,t)$ și fie ΔT , variația temperaturii unei particule când se deplasează, în intervalul de timp Δt între două puncte M_1 și M_2 situate la distanță $\Delta\vec{r}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Pentru a calcula variația ΔT vom utiliza un procedeu identic cu cel folosit în calculul accelerației .

Dezvoltăm în serie Taylor temperatura și păstrăm primii termeni :

$$T(M_2) = T + \Delta T = T + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t \quad (3.20)$$

sau ținând seama de relația (3.13) :

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} u \Delta t + \frac{\partial T}{\partial y} v \Delta t + \frac{\partial T}{\partial z} w \Delta t + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t \quad (3.21)$$

Împărțind cu Δt și trecând la limită pentru $\Delta t \rightarrow 0$ obținem pentru variația temperaturii :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla T) = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} T \quad (3.22)$$

Ca și în cazul câmpului vectorial , variația în timp a câmpului scalar este caracterizată prin doi termeni :

- termenul $\frac{\partial T}{\partial t}$ reprezintă variația în timp a proprietății respective într-un punct fix din spațiu
- termenul al doilea denumit și termenul convectiv caracterizează transportul proprietății respective de către fluid între două puncte din spațiu. Spre exemplu în cazul unui câmp staționar

primul termen $\frac{\partial T}{\partial t}$ din relația precedentă este nul dar temperatura variază în timp datorită transportului prin convecție al căldurii, proces caracterizat de termenul $\bar{v} \cdot \text{grad}T$.

3.3 Debit și debit specific

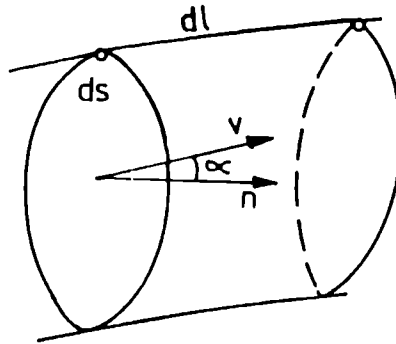


Figura 3.6: Debite printr-o suprafață elementară

Să considerăm o suprafață infinitezimală dS în jurul unei linii de curent și fie \bar{v} vectorul vitezei ce trece prin centrul suprafeței (Figura 3.6).

În intervalul de timp dt masa de fluid dm ce străbate suprafața dS este :

$$dm = \rho dS (dl \cos\alpha) \quad (3.23)$$

unde dl este lungimea elementară parcursă în intervalul dt în lungul liniei de curent iar α unghiul dintre vectorul \bar{n} al normalei la suprafața dS și elementul de arc dl . Cum $d\vec{l} = \bar{v} \cdot dt$, atunci masa care străbate în unitatea de timp suprafața dS este :

$$dm = \rho dS v \cos\alpha = \rho v_n dS \quad (3.24)$$

unde v_n este proiecția vitezei pe direcția normalei exterioare la suprafața dS

Însumând pe întreaga suprafață S obținem expresia *debitului masic*, mărime scalară definită ca masa ce străbate suprafața S în unitatea de timp

$$Q_m = \int_S \rho v \cos \alpha dS \quad (3.25)$$

Deoarece expresia de sub integrală sugerează produsul scalar a doi vectori vom recurge la noțiunea de vector suprafață, în care elementului de suprafață dS i se asociază un vector având modulul dS iar orientarea definită de versorul normalei exterioare \vec{n} .

Deci

$$d\vec{S} = dS\vec{n} \quad (3.26)$$

Cu această observație, expresia debitului masic devine:

$$Q_m = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad [M/T] \quad (3.27)$$

Dacă densitatea este constantă vom defini *debitul volumic* drept volumul de fluid ce străbate suprafața S în unitatea de timp :

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.28)$$

Să considerăm o suprafață oarecare S pentru care viteza prezintă variații locale.

Aplicând teorema mediei obținem debitul specific al fluidului prin suprafața dată definit ca volumul ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață :

$$\bar{q} = \frac{1}{S} \int_S \vec{v}(x, y, z) d\vec{S} \quad (3.29)$$

și ținând seama de expresia debitului volumic din ecuația (3.28)

$$q = Q/S \quad (3.30)$$

După cum se observă debitul specific are semnificația unei viteze fictive de valoare constantă , care transportă în unitatea de timp același volum de fluid ca și distribuția reală de viteze .

Analog , debitul masic specific sau fluxul masic , definit drept masa ce străbate în unitatea de timp o suprafață unitară , are expresia :

$$\bar{q}_m = \frac{Q_m}{S} = \rho \bar{q} \quad (3.31)$$

3.4 Rotația fluidului.

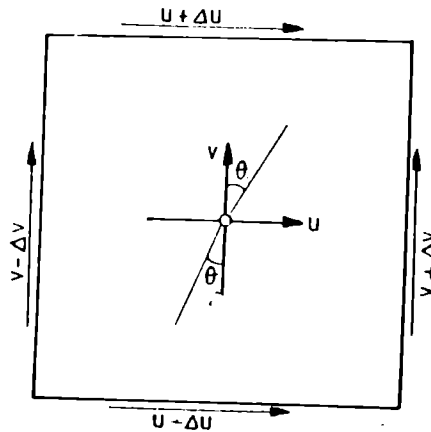


Figura 3.7: Rotația unei particule elementare de fluid.

În paragraful precedent am considerat tacit că particulele ce străbat suprafața S au numai mișcări de translație. Această ipoteză este valabilă numai în măsura în care viteza este constantă pe domeniul ocupat de particulă. În cazul în care viteza prezintă variații, particula va fi supusă, pe lângă mișcarea de translație și unei mișcări de rotație

Generalizând, rotația unei particule tridimensionale, de laturi dx, dy, dz va fi descrisă de vectorul vitezei unghiulare $\Omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

Să considerăm o particulă infimezimală de fluid având laturile dx și dy și fie u și v componentele vitezei în centrul particulei . Să notăm , deasemeni cu : $u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2}$ respectiv cu

: $u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2}$ componentele orizontale ale vitezelor pe laturile paralele cu axa OX . Sub acțiunea acestor componente particula va tinde să se rotească în jurul axei verticale OZ . În intervalul de timp dt latura paralelă cu axa OY se va roti cu un unghi $d\theta_y = d\theta_1 + d\theta_2$ (Figura 3.7). Aproximând unghiul cu tangenta avem :

$$d\theta_y = - \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) - \left(u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \right] \frac{dt}{dy} = - \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (3.32)$$

Prin definiție viteza unghiulară ω_y cu care se rotește latura dy este:

$$\omega_y = \frac{d\theta_y}{dt} = - \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (3.33)$$

Analog , latura orizontală se va roti cu unghiul $d\theta_x$ având valoarea :

$$d\theta_x = \left[\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left(v - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \frac{dt}{dx} \quad (3.34)$$

astfel încât componenta vitezei unghiulare ω_x cu care se rotește latura dx este:

$$\omega_x = \frac{d\theta_x}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.35)$$

Viteza unghiulară medie de rotație a elementului în jurul axei OZ are atunci expresia :

$$\omega_z = \frac{1}{2} (\omega_x + \omega_y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.36)$$

Componentele ω_y și ω_x se deduc urmând procedeul descris anterior . Avem atunci :

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$
(3.41)

Se observă că vectorul viteză unghiulară Ω are drept componentă rotorul câmpului vitezelor instantanee. Avem atunci:

$$\Omega = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$$
(3.38)

Așa cum s-a prezentat rotația fluidului este dată de componentele tangențiale ale vitezei. În condițiile continuității fluidului ele pot crea vârtejuri locale. O măsură a intensității acestor vârtejuri este dată vectorul circulație.

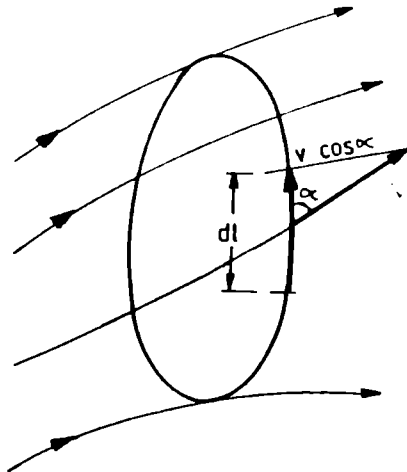


Figura 3.8 : Viteza tangențială și flux de rotație

Fie atunci un domeniu de fluid mărginit de curba C (Figura 3.8). Prin definiție circulația vectorului în lungul unei curbe C este descrisă de integrala componentei tangențiale a vitezei pe curba C . Dacă notăm cu α unghiul dintre viteză și curba C într-un punct, atunci circulația elementară $d\Gamma$ are expresia:

$$d\Gamma = V \cos\alpha \, dl \quad (3.39)$$

și însumând pe toată curba C obținem expresia circulației în lungul acestei curbe:

$$\Gamma = \oint_C d\Gamma = \oint_C v \, dl \cos\alpha = \oint_C \bar{v} \, d\bar{l} \quad (3.40)$$

Semnificația circulației se obține prin aplicarea teoremei Stokes:

$$\Gamma = \oint_C v \, dl = \int_S \text{rot} \bar{v} \, dS = 2 \int_S \bar{\Omega} \, dS \quad (3.41)$$

unde prin S am notat suprafața delimitată prin curba C .

Fie $\bar{\Omega}$ valoarea medie a vectorului rotației pe suprafața S . Ecuația (3.41) devine:

$$\Gamma = 2\bar{\Omega} \cdot S \quad (3.42)$$

Relația de mai sus arată atunci că circulația reprezintă dublul fluxului total al rotației printr-o suprafață oarecare.

3.5. Mișcări irotacionale și rotaționale

Să considerăm un domeniu din fluid pentru care în toate punctele vectorul de rotație este nul:

$$\Omega = \text{rot} \bar{v} = 0 \quad (3.43)$$

Există atunci întotdeauna o funcție scalară φ astfel încât :

$$\bar{v} = \text{grad} \varphi \quad (3.44)$$

Funcția φ este denumită potențialul vitezelor iar mișcarea fluidelor care satisfac ecuația (3.44) se numește curgere potențială sau irotațională .

Fie atunci C o curbă închisă într-o zonă de curgere potențială . Circulația Γ în lungul acestei curbe este nulă . Într-adevăr aplicând teorema Stokes și ținând seama de relația (3.43) avem :

$$\Gamma = \int_C \vec{v} dl = \int_S \text{rot} \vec{v} dS = 0 \quad (3.45)$$

Dacă A și B sunt două puncte arbitrare ale curbei C atunci relația (3.45) implică :

$$\int_A^B \vec{v} dl + \int_B^A \vec{v} dl = 0 \quad (3.46)$$

sau , deoarece punctele A și B sunt arbitrar alese :

$$\int_{A^1B} \vec{v} dl = \int_{A^2B} \vec{v} dl \quad (3.47)$$

În consecință într-o mișcare irotațională circulația vitezelor între două puncte este independentă de curba care leagă aceste două puncte .

În acest caz $d\Gamma = \vec{v} dl$ este o diferențială totală exactă și circulația între două puncte se calculează ușor dacă se cunoaște potențialul φ în punctele respective :

$$\Gamma = \int_A^B \vec{v} dl = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B \quad (3.48)$$

Câmpurile sau zonele unde rotația este diferită de zero se numesc câmpuri rotaționale .

4. LEGI DE CONSERVARE.

În acest capitol vom prezenta succint formele pe care le au legile generale de conservare - ale masei respectiv ale momentului cinetic - în cazul fluidelor . Abordarea problemei este Euleriană, iar domeniul fix din spațiu pe care se face analiza poartă numele de *volum de control* iar suprafața care îl înconjoară se numește *suprafață de control*. Nu există restricții asupra volumului de control: el poate fi infinitesimal sau finit, dar rămâne fix în spațiu iar prin suprafața de control poate circula orice mărime: masă, moment cinetic, etc. Conservarea masei prin volumul de control conduce la *ecuația de continuitate* a fluidului care are două forme locală și integrală.

4.1. Conservarea masei .Ecuțiile de continuitate .

Legea conservării masei exprimă faptul că variația masei de fluid conținută într-un volum dat , într-un anumit interval de timp, trebuie să fie egală cu diferența dintre masa de fluid care intră și cea care părăsește volumul respectiv în intervalul de timp dat .

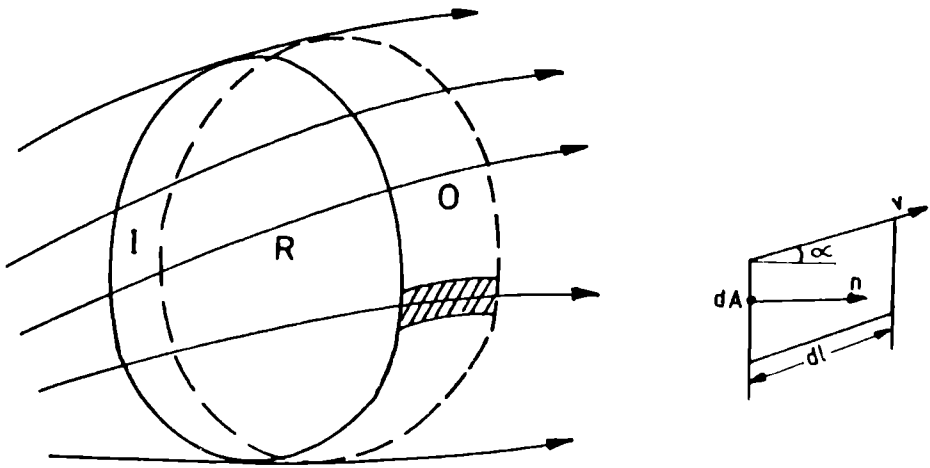


Figura 4.1: Conservarea masei prin volumul de control $I+R+O$ (regim permanent)

Să considerăm pentru început cazul regimului permanent și fie o masă de fluid care la momentul t ocupă volumul $I + R$ (Figura 4.1) iar după intervalul de timp δt ocupă volumul $R + O$. Conservarea masei revine la:

$$(m_I + m_R)|_t = (m_R + m_O)|_{t+\delta t} \quad (4.1)$$

unde am notat cu m_I , m_R , m_O masele conținute în volumele I , R , O la intervalele de timp t , respectiv $t + \delta t$.

În condițiile regimului permanent $m_R = \text{constant}$ și ecuația precedentă conduce la :

$$m_I|_t = m_O|_{t+\delta t} \quad (4.2)$$

Cu alte cuvinte masa care la momentul t era cuprinsă în volumul I se regăsește după intervalul δt în volumul O .

Fie atunci un tub de curent elementar al volumului O , mărginit de suprafața dA și de liniile de curent infinitezimale dl și fie α unghiul pe care îl face vectorul viteză - tangent la dl - cu normala exterioară la suprafață.

Atunci masa dm care se mișcă în intervalul δt este conținută în volumul prizmei $dA \cdot dl \cdot \cos \alpha$ și avem:

$$dm = \rho dA dl \cos \alpha \quad (4.3)$$

Însumând pe toată suprafața A_O obținem pentru masa care părăsește volumul R în intervalul δt expresia :

$$m_o = \int_{S_o} \rho v \cos \alpha dA \delta t \quad (4.4)$$

unde v este viteza fluidului ce străbate aria dA egală cu raportul $dl/\delta t$.

Introducând vectorul suprafață dA , relația (4.4) devine :

$$m_o = \int_{S_I} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A} \delta t \quad (4.6)$$

Analog masa care intră prin suprafața S_I ce mărginește volumul V în același interval de timp δt este :

$$m_I = - \int_{S_I} \bar{v} \cdot d\bar{A} \delta t \quad (4.7)$$

semnul - fiind datorat faptului că versorul n al normalei exterioare și versorul t al liniilor de curent fac între ele un unghi de 180° .

Introducând relațiile (4.6) și (4.7) în ecuația (4.2) obținem:

$$- dt \int_{S_I} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A} = dt \int_{S_O} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A} \quad (4.8)$$

sau

$$\oint_S \rho \bar{v} \cdot d\bar{A} = 0 \quad (4.9)$$

unde $S \equiv S_I + S_O$ este suprafața de control.

Ecuația (4.9) reprezintă forma integrală a ecuației de continuitate și poate fi enunțată astfel: În regim permanent și în absența surselor, debitul masei care străbate o suprafață închisă se conservă.

Dacă transformăm integrala de suprafață cu ajutorul teoremei Gauss - Ostrogradski, relația (4.9) devine:

$$\int_S \rho \bar{v} \cdot d\bar{A} = \int_V \text{div}(\rho \bar{v}) dv = 0 \quad (4.10)$$

Cum relația precedentă este independentă de volum avem în definitiv :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.11)$$

Ecuția (4.11) reprezintă forma locală (punctuală) a ecuației de continuitate și exprimă faptul că în regim permanent, în absența surselor, variația debitului masic specific este nulă în orice punct. În cazul regimului nepermanent vom observa că masa fluidului aflat la un moment dat în volumul de control V este :

$$m = \int_V \rho dV \quad (4.12)$$

Cum volumul de control este prin definiție fix variația masei de fluid conținută în volum în intervalul de timp Δt implică numai variația densității acestuia. Avem deci :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V \rho dt}{\Delta t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dt \quad (4.13)$$

unde semnul - este dat micșorării masei.

Variația masei de fluid ce străbate suprafața S a volumului de control în intervalul Δt este dată de ecuația (4.9) și conform legii conservării masei trebuie să fie egală cu variația masei conținută în volumul respectiv în același interval de timp. Egalând cele două ecuații obținem :

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dt \quad (4.14)$$

sau aplicând teorema Gauss - Ostrogradski integralei de suprafață :

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] = 0 \quad (4.15)$$

Deoarece integrala de volum trebuie verificată pentru orice volum obținem atunci pentru forma locală a ecuației de continuitate a masei în regim nestaționar următoarea ecuație :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.16)$$

Observații

1^o Forma locală a ecuației de continuitate poate fi dedusă dacă vom considera (Figura 4.2) un volum de control infinitezimal dV de laturi dx , dy , dz . Diferența dintre masa de fluid care intră și masa de fluid care iese în intervalul Δt prin fețele paralele cu axa OX ale paralelipipedului este :

$$\rho v_x dy dz \Delta t - \left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right) dy dz \Delta t = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz \Delta t \quad (4.17)$$

unde prin v_x am notat componente vitezei fluidului pe direcția x .

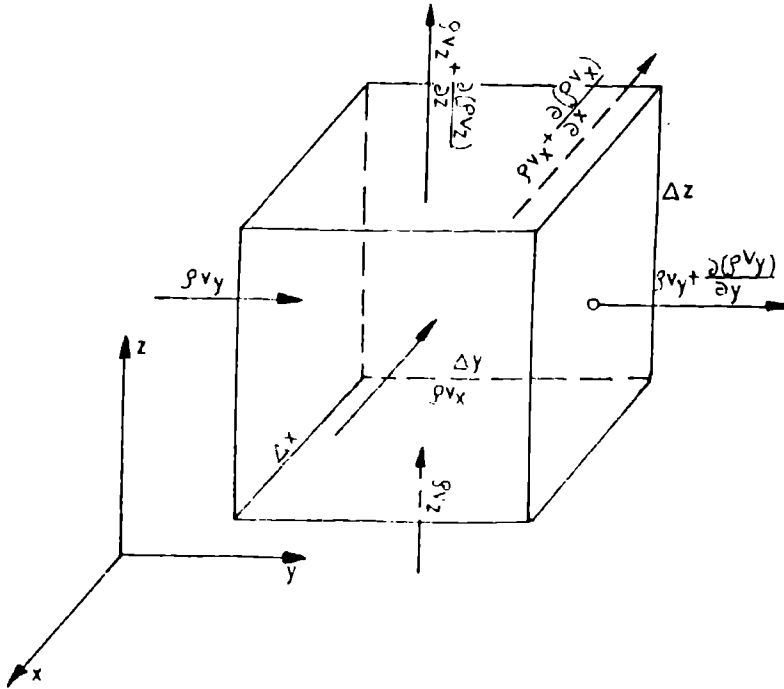


Figura 4.2: Conservarea masei prin volumul de control infinitezimal $dx dy dz$ (regim tranzitoriu)

Analog, bilanțul masei pe fețele paralele cu axele OY și OZ are expresiile :

$$- \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy dz \Delta t \quad (4.18)$$

$$- \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz \Delta t$$

Variația masei conținută în volumul elementar n același interval de timp Δt este :

$$dm = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) \Delta t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \Delta t \quad (4.19)$$

Conservarea masei de fluid în intervalul Δt revine la :

$$- \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) dx dy dz \Delta t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \Delta t \quad (4.20)$$

unde, după simplificări regăsim ecuația (4.16) .

2^o În cazul în care în volum există surse elementare concentrate având debitul volumetric Q , termenul de acumulare din ecuația (4.19) se modifică astfel :

$$dm = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu Q \right) dx dy dz \Delta t \quad (4.21)$$

iar ecuația (4.20) devine :

$$- \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \cdot (dx dy dz \Delta t) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu Q \right) dx dy dz \Delta t \quad (4.22)$$

În prezența surselor ecuația de continuitate are deci forma :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu Q \quad (4.23)$$

Debitele concentrate sunt pozitive când sunt injectate respectiv negative când sunt extrase .

4.2. Caz particular: tubul de curent.

Fie un volum de control dintr-un tub de curent mărginit de secțiunile S_1 și S_2 . În condițiile regimului permanent, masa de fluid din volumul de control se conservă și avem (Figura 4.3) :

$$\int_{S_1} \rho \bar{v}_1 \bar{n}_1 dS + \int_{S_2} \rho \bar{v}_2 \bar{n}_2 dS + \int_{S_L} \rho \bar{v}_L \bar{n}_L dS = 0 \quad (4.24)$$

În relația precedentă am presupus fluidul incompresibil și am notat cu n_1 , n_2 , n_L versorii normalelor exterioare la suprafețele S_1 , S_2 , S_L .

Cum suprafața laterală S_L este suprafața de curent avem $\bar{v}_L \bar{n}_L = 0$ și relația de mai sus devine la

$$\int_{S_1} v_n dS_1 - \int_{S_2} v_n dS_2 = 0 \quad (4.25)$$

Dacă vom nota cu v_1 și v_2 vitezele medii pe secțiunile S_1 și S_2 obținem :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (4.26)$$

sau

$$Q_1 = Q_2 \quad (4.27)$$

Cu alte cuvinte în regim permanent , debitul volumic dintr-un tub de curent se conservă .

În cazul regimului nepermanent se consideră un tub subțire și fie două secțiuni ale volumului de control (Figura 4.3) În intervalul de timp δt diferența dintre masele care circulă prin suprafețele S_1 și S_2 este :

$$\partial(\rho VA) - \left[\rho VA + \frac{\partial}{\partial s}(\rho VA) dl \right] \delta t = - \frac{\partial}{\partial s}(\rho VA) dl \delta t \quad (4.28)$$

unde prin dl am notat elementul infinitesimal al liniei de curent .

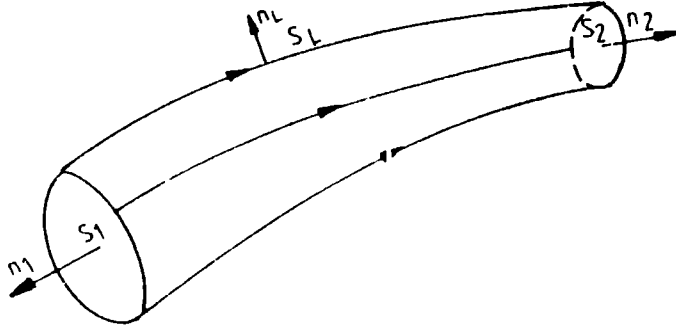


Figura 4.3: Conservarea masei într-un tub de curent.

Această diferență trebuie să fie egală cu masa acumulată în unitatea de volum de control în același interval de timp δt :

$$\Delta m = \Delta(\rho A) dl \quad (4.29)$$

Scriind bilanțul pentru intervalul de timp δt obținem :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho VA) dl \delta t = \partial(\rho A) dl \quad (4.30)$$

și trecând la limită pentru $\partial t \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho VA) = - \frac{\partial}{\partial s}(\rho A) \quad (4.31)$$

În cazul densității constante relația precedentă se simplifică :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(VA)}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

Se observă că dacă aria tubului variază în timp , ecuația continuității indică o variație corespunzătoare a vitezei . În condițiile regimului permanent $\partial A/\partial t = 0$ și obținem din nou continuitatea debitelor.

4.3. Conservarea impulsului.

Reamintim că legea a doua a dinamicii poate fi formulată nu numai în termeni de forțe și accelerații dar și în termeni de forțe și impuls . Fie deci un sistem de n puncte materiale asupra cărora acționează un număr de m forțe exterioare .

Legea variației impulsului poate fi formulată astfel :

Într-un interval de timp Δt , variația impulsului unui sistem de puncte materiale este egal cu produsul dintre rezultanta forțelor exterioare și timpul Δt de acțiune al acestora :

$$\sum_i^m \bar{F}_i \Delta t = \Delta \sum_i^n \bar{p}_i \quad (4.33)$$

unde am notat prin :

$p_i = m_i v_i$ impulsul unui punct material de masă m_i și viteză v_i

F_i forța exterioară

Dacă masele m_i se conservă , relația precedentă poate fi rescrisă sub forma :

$$\sum_i^m \bar{F}_i = \sum_i \frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \sum_i m_i \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \quad (4.34)$$

și trecând la limită pentru $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\sum_j^m F_j = \sum_i^n \frac{dp_i}{dt} = \sum_i^n m_i \frac{dv_i}{dt} \quad (4.35)$$

În cazul fluidelor se pune problema generalizării relațiilor (4.35) de la un sistem cu un număr finit de grade de libertate la un sistem cu un număr infinit de grade de libertate, cum este mediul continuu.

Vom considera, pentru început, mișcarea permanentă a unui fluid ideal și fie atunci (Figura 4.4a) un tub de curent subțire delimitat de secțiunile AB și CD supus acțiunii forțelor de presiune P și forțelor masice de intensitate ρg .

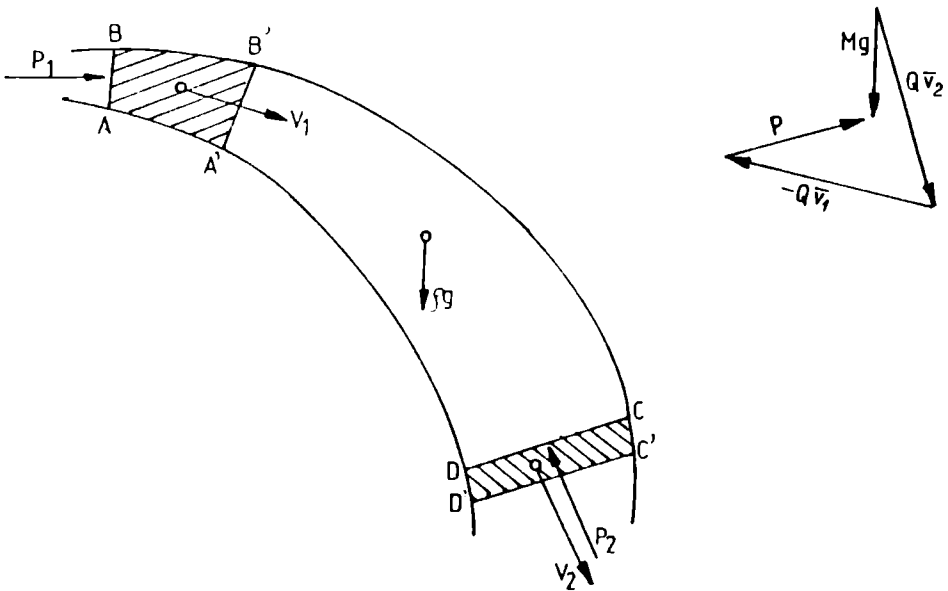


Figura 4.4: Conservarea impulsului într-un tub de curent

Fie Q debitul volumic ce traversează tubul de curent. În intervalul de timp Δt masa care pătrunde în tubul de curent prin secțiunea AB este: $\rho Q \Delta t$ iar impulsul corespunzător este:

$$\bar{p}_1 = \rho Q \bar{v}_1 \Delta t \quad (4.36)$$

În același interval de timp masa de fluid ce părăsește volumul prin secțiunea CD este $\rho Q \Delta t$

având impulsul :

$$\bar{p}_2 = \rho Q v_2 \Delta t \quad (4.37)$$

Variația impulsului în unitatea de timp este atunci :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho Q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad (4.38)$$

Dacă notăm cu Mg masa de fluid din volumul de control atunci legea variației impulsului acestei mase are forma :

$$\rho Q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = Mg + \bar{P} \quad (4.39)$$

De remarcat faptul că termenii din membrul stâng au dimensiuni de forță și atunci din diagrama vectorială putem deduce rezultanta forțelor de presiune \bar{P} .

Rezultatul precedent poate fi generalizat pentru orice volum de control V , mărginit de suprafața S

Fie dS un element de suprafață având versorul normalei exterioare \bar{n} . Bilanțul masic prin această suprafață în unitatea de timp este :

$$dq = \rho dS \bar{v} \cdot \bar{n} = \rho \bar{v} \cdot d\bar{S} \quad (4.40)$$

iar variația impulsului acestei mase în unitatea de timp este :

$$dp = dq \cdot \bar{v} = \rho (\bar{v} \cdot d\bar{S}) \bar{v} = \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) \bar{v} \cdot dS \quad (4.41)$$

unde am notat prin $d\bar{S}$ vectorul suprafață corespunzătoare.

Integrând pe întreaga suprafață S ce mărginește volumul de control V legea variației impulsului are forma :

$$\int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{v}dS = \int_V \rho\vec{g}dV + \int_S p\vec{n}dS \quad (4.42)$$

În ecuația (4.42) primul termen din membrul drept reprezintă rezultantele forțelor masice ce acționează asupra volumului de control iar al doilea termen reprezintă forțele exterioare , de presiune distribuite pe suprafața S ce mărginește acest volum .

Se observă că teorema variației impulsului nu necesită decât cunoașterea distribuției vitezelor sau a presiunilor pe suprafața S ce mărginește un anumit domeniu . Aplicarea ei este independentă de procesele ce au loc în interiorul acestei suprafețe : pierderi prin frecare vâscoasă , turbulență , etc .

În cazul proceselor nepermanente generalizarea teoremei variației impulsului trebuie să ia în considerație masa acumulată în volumul de control în unitatea de timp . Printr-un raționament asemănător cu cel precedent în cazul ecuației de continuitate variația impulsului corespunzător masei acumulate este :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})dV$$

și legea variației impulsului devine :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})dV + \int_V \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{v}dS = \int_V \rho\vec{g}dV + \int_S p\vec{n}dS \quad (4.43)$$

Ca o aplicație vom regăsi ecuația (4.39) pentru un tronson al unui tub de curent ca un caz particular al formulei generale (4.42) al legii variației impulsului .

Conform figurii 4.4 avem :

$$\int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{v}dS = \int_{AB} \rho\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})dS + \int_{BC} \rho\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})dS +$$

$$\int_{CD} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \int_{DA} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS \quad (4.44)$$

Deoarece vitezele sunt tangente la liniile de curent produsele $\bar{v} \cdot \bar{n}$ sunt nule pe suprafețele *BC* și *DA*.

Dacă vom considera suprafețele *AB* și *BC* suficient de mici astfel încât vitezele să fie constante termenii corespunzători acestor suprafețe sunt :

$$\rho \bar{V} (\bar{V} \cdot \bar{n}) \int_S dS = \rho \bar{V} S \cdot \bar{V} = Q \cdot \bar{V} \quad (4.45)$$

Relația (4.44) revine atunci la :

$$\int_S \rho \bar{V} (\bar{V} \cdot \bar{n}) dS = Q(\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \quad (4.46)$$

unde semnul - apare datorită unghiului de 180° făcut de V_1 cu normala exterioară .

Fluidul fiind incompresibil masa conținută în tronsonul de tub de curent este constantă și avem :

$$\int_V \rho g dV = Mg \quad (4.47)$$

În final dacă notăm cu :

$$\bar{P} = \int_S \rho \bar{n} dS \quad (4.48)$$

rezultanta forței de presiune , ecuația (4.44) devine :

$$Q(\bar{V}_2 - \bar{V}_1) = Mg + \bar{P} \quad (4.49)$$

identică cu ecuația (4.39)

Cazul mediilor poroase

În cazul mediilor poroase fluidul nu ocupă decît o parte din volumul de control. Fie n porozitatea mediului definită ca raportul dintre volumul porilor și volumul total al probei.

Pentru a formula ecuația de continuitate în mediul poros vom reconsidera un volum de control infinitezimal de laturi $dx dy dz$. Atunci masa care pătrunde prin suprafața $dy dz$ în intervalul Δt este: $n\rho v_x dy dz \Delta t$, iar diferența dintre masele de fluid care intră, respectiv părăsesc volumul de control prin suprafețele paralele cu axa OX este:

$$n\rho v_x dy dz \Delta t - \left[n\rho v_x + \frac{\partial(n\rho v_x)}{\partial x} dx \right] dy dz \Delta t = - \frac{\partial(n\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz \Delta t \quad (4.50)$$

Analog diferențele dintre masele de intrare și ieșire pe fețele paralele cu axele OY și OZ au expresiile:

$$- \frac{\partial}{\partial y} (n\rho v_y) dx dy dz \Delta t \quad (4.51)$$

respectiv:

$$- \frac{\partial}{\partial z} (n\rho v_z) dx dy dz \Delta t \quad (4.52)$$

Pe de altă parte masa acumulată în volumul de control în același interval de timp este:

$\Delta(\rho n) dx dy dz$. Bilanșul masic are atunci expresia:

$$- \left[- \frac{\partial}{\partial x} (n\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (n\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (n\rho v_z) \right] dx dy dz \Delta t = \Delta(\rho n) dx dy dz \quad (4.54)$$

După simplificări și trecând la limită pentru Δt , obținem ecuația de continuitate în cazul mediilor poroase:

$$\operatorname{div}(n\rho \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t} (n\rho) \quad (4.54)$$

5. DINAMICA FLUIDELOR.

Dacă în cazul unui fluid în echilibru vâscozitatea nu intervine, în cazul mișcării vâscozitatea joacă un rol determinant. Ca și în cazul legilor de conservare vom utiliza descrierea Euleriană a mișcării. Vom deosebi două categorii de fluide: fluide *ideale* sau '*uscate*' în care vâscozitatea este neglijabilă. Mișcarea acestora este descrisă de ecuația Euler care este o consecință a legii lui Newton aplicate unui volum de control infinitesimal. A doua categorie o reprezintă fluidele reale, vâscoase pentru care mișcarea este descrisă de ecuațiile lui Cauchy, care exprimă relația dintre componentele accelerației unei particule de fluid și ale tensiunilor exercitate pe fețele acesteia. În cazul unui fluid Newtonian ecuațiile Cauchy se reduc la ecuațiile Navier – Stokes în care accelerația particulei este funcție numai de viteză și de presiunile exercitate pe fețele acesteia.

5.1. Fluidul ideal. Ecuația Euler.

După cum am arătat în cazul fluidului ideal vâscozitatea este neglijabilă. Componentele tangențiale ale tensorului tensiunilor sunt în acest caz nule iar singurele forțe care acționează asupra fluidului sunt forțele de presiune hidrostatică p , normale pe suprafața acestuia.

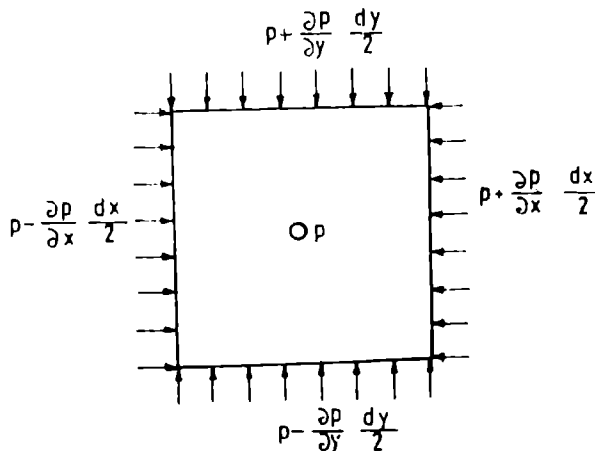


Figura 5.1: Distribuția forțelor pe laturile unui element infinitesimal

Dacă vom considera (Figura.5.1) un element infinitesimal de laturi dx și dy având presiunea în centrul de masă p , atunci presiunile pe laturi vor fi:

$$\rho\mu \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}, \text{ pe laturi paralele cu axa } OX \quad (5.1)$$

respectiv:

$$\rho\mu \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}, \text{ pe laturi paralele cu axa } OY.$$

Rezultantele forțelor pe cele două axe F_x , respectiv F_y vor avea expresiile:

$$F_x = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy$$

$$F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dx \cdot dy + \rho g dx \cdot dy \quad (5.2)$$

Conform legii a doua a dinamicii rezultanta forțelor aplicate *unei particule* este egală cu produsul dintre masă și accelerația acesteia. În acest caz deci accelerația este exprimată de derivata totală a vitezei și avem:

$$\rho \frac{D\bar{V}_x}{Dt} dx \cdot dy = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy$$

$$\rho \frac{D\bar{V}_y}{Dt} dx \cdot dy = -\frac{\partial p}{\partial y} dx \cdot dy + \rho g dx \cdot dy \quad (5.3)$$

sau, vectorial:

$$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = -gradp + \rho \bar{g} \quad (5.4)$$

Explicitând derivata totală obținem forma definitivă a ecuației lui Euler:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -gradp + \rho \bar{g} - (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \quad (5.5)$$

5.2. Fluidul vâscos. Ecuațiile lui Cauchy.

Vom considera descrierea euleriană a mișcării și fie un volum oarecare de fluid v mărginit de suprafața S . Ca și în cazul fluidului ideal accelerația unei particule de fluid este descrisă de derivata substanțială $D\bar{V}/Dt$ iar produsul masă - accelerație al fluidului din domeniul are expresia:

$$\int_v \rho \frac{D\bar{V}}{Dt} dv \quad (5.6)$$

După cum am arătat în paragraful precedent forțele exterioare sunt alcătuite din forțe masice distribuite pe volum și forțe de legătură distribuite pe suprafața S . Atunci, rezultatele forțelor masice sunt date de relația

$$\bar{F}_w = \int \rho \bar{g} dv \quad (5.7)$$

Pentru determinarea rezultantei forțelor de legătură să considerăm un element de suprafață dS pe care acționează forța \bar{T} . Atunci pe întreaga suprafață forțele de legătură vor avea rezultanta

$$\int_s \bar{T} \cos \alpha dS = \int_s \bar{T}_n dS \quad (5.8)$$

unde am notat prin α unghiul dintre normala exterioară și forța T iar prin T_n proiecția acestei forțe pe direcția normală. Prin aplicarea teoremei Gauss - Ostrogradski integrala de suprafață se transformă în integrală de volum:

$$\int_s \bar{T} dS = \int_v \operatorname{div} \bar{T} dV = \int_v \left(\frac{\partial \bar{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{T}_z}{\partial z} \right) dv \quad (5.9)$$

unde $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$ reprezintă componentele forței \bar{T}_n .

În consecință ecuațiile de mișcare au expresiile

$$\int_V \left(-\frac{D\bar{V}}{Dt} \rho + \rho g + \text{div} \bar{T}_n \right) dv = 0 \quad (5.10)$$

Cum integrala este nulă independent de volum avem în definitiv

$$\frac{D\bar{V}}{Dt} = \bar{g} + \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{T}_n = 0 \quad (5.11)$$

sau

$$\frac{D\bar{V}}{Dt} = \bar{g} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{T}_z}{\partial z} \right) \quad (5.12)$$

Ecuția de mai jos descrie mișcarea unui fluid vâscos în domeniul V și este datorată lui Cauchy.

Proiecția pe axe a acestei ecuații conduce la sistemul de ecuații de mișcare

$$\begin{aligned} \frac{DV_x}{Dt} &= g_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{DV_y}{Dt} &= g_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{DV_z}{Dt} &= g_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.3. Ecuațiile Navier-Stokes.

Din punct de vedere fizic tensiunile exercitate pe suprafața fluidului sunt reprezentate de presiunile hidrostactice, orientate normal pe suprafață și forțele de frecare vâscoasă. În consecință componentele normale τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} pot fi descompuse în $\tau_{ii} = -p + \tau_{ii}^*$.

Semnul - al presiunilor este datorat orientării lor față de normala exterioară. Prin τ_{ii}^* am notat componentele normale ale tensiunilor vâscoase.

Fără a afecta generalitatea vom considera o problemă bidimensională și vom rescrie sistemul de ecuații de mișcare:

$$\begin{aligned} \frac{DV_x}{Dt} &= g_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) = g_x + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} \right) \\ \frac{DV_y}{Dt} &= g_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) = g_y + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Conform legii lui Newton, pentru un fluid vâscos tensiunile tangențiale sunt proporționale cu vitezele de deformație. Avem:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad (5.15)$$

La rândul lor tensiunile vâscoase normale sunt proporționale cu vitezele de deformație normală și relațiile lui Newton devin:

$$\tau_{xx}^* = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad (5.16)$$

Înlocuind expresiile tensiunilor în ecuațiile Cauchy obținem:

$$\begin{aligned} \frac{DV_x}{Dt} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} = \\ &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

și

$$\frac{DV_x}{Dt} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 V_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{V}) \quad (5.18)$$

Analog pentru componentele pe y și z

$$\frac{DV_y}{Dt} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 V_y + \mu \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{V}) \quad (5.19)$$

respectiv

$$\frac{DV_z}{Dt} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 V_z + \mu \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{V})$$

Ecuțiile (5.18) și (5.19) deduse independent de Stokes și Navier descriu mișcarea fluidului având ca necunoscute câmpul vitezelor.

În formă vectorială ecuațiile Navier-Stokes au expresia

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \mu \vec{V} (\operatorname{div} \vec{V}) \quad (5.20)$$

sau, ținând seama de expresia derivatei totale:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \mu \vec{V} (\operatorname{div} \vec{V}) \quad (5.21)$$

Se observă că în cazul fluidelor perfecte ($\mu=0$) ecuațiile Navier-Stokes se reduc la ecuația Euler:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (5.22)$$

Dacă procesul este staționar ecuația lui Euler devine

$$\vec{g} = \frac{1}{\rho} \text{grad}p - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (5.23)$$

5.4. Aplicații

1. Mișcarea printr-o fisură.

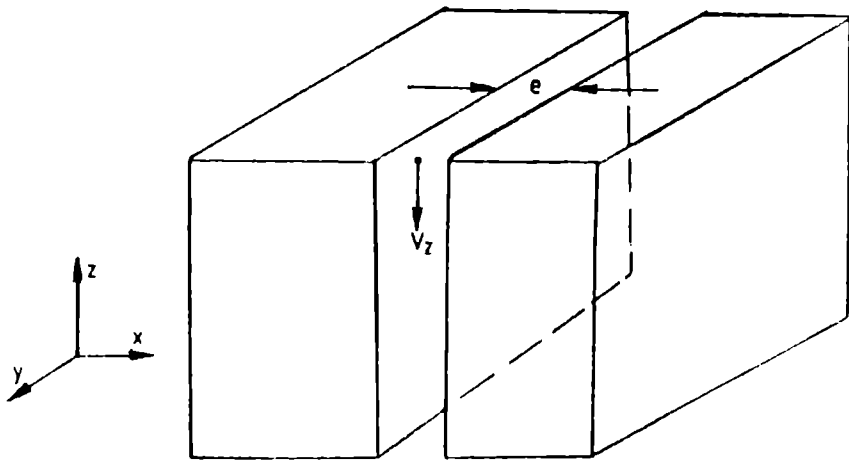


Figura 5.2. Mișcarea fluidei printr-o fisură plană

Să considerăm o fisură cu deschiderea constantă e , având pereții paraleli cu planul YOZ . (Figura 5.2.). În cazul unui proces staționar mișcarea este uniformă în lungul axei OZ iar componentele vitezei devin:

$$\begin{aligned} V_x = V_y = 0 \\ V_z \neq 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Datorită vâscozității viteza variază în planul XOZ astfel încât:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_z}{\partial x} &\neq 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial y} &= \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (5.25)$$

Cu aceste observații ecuațiile Navier-Stokes capătă forma simplificată:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \nabla^2 V_z + \rho g &= 0\end{aligned}\quad (5.26)$$

Tinând seama de relația (5.24) ultima ecuație devine:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \rho g \quad (5.27)$$

Cum termenul din stânga depinde doar de z iar cel din dreapta doar de x , egalitatea lor este posibilă numai în cazul în care amândoi sunt egali cu aceeași constantă:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = C$$

și

$$\mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \rho g = \mu \frac{d^2 V_z}{dx^2} - \rho g = C \quad (5.28)$$

Ultima ecuație se integrează prin separarea variabilelor. Avem:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 V_z}{dx^2} &= \frac{C + \rho g}{\mu} \\ V_z &= \frac{C + \rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2\end{aligned}\quad (5.29)$$

Constantele C_1 și C_2 → se obțin din condițiile de margine conform cărora viteza fluidului la contactul cu pereții fisurii este nulă:

$$V_z(x=0) = V_z(x=e) = 0 \quad (3.30)$$

Aceasta revine la:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= -\frac{C + \rho g}{2\mu} e \end{aligned} \quad (5.31)$$

Inlocuind obținem expresia finală a vitezei:

$$V_z = \frac{C + \rho g}{2\mu} (x^2 - ex) \quad (5.32)$$

Se observă că, în orice secțiune paralelă cu planul XOZ profilul vitezelor este parabolic. Dacă vom considera un tronson de lățime b atunci debitul Q care traversează secțiunea are expresia:

$$Q = \int_0^e V_z b dx = b \frac{C + \rho g}{2\mu} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ex^2}{2} \right) \Big|_0^e = \frac{b}{12\mu} (C + \rho g) e^3 \quad (5.33)$$

Cum gradientul presiunii este constant termenul din paranteză devine (conform primei ecuații 5.28):

$$C + \rho g = \partial p / \partial z + \rho g = \text{grad} p + \rho g = \text{grad} h \quad (5.34)$$

unde h este nivelul piezometric definit de:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

2. Mișcarea într-o conductă orizontală.

Vom considera (Figura 5.3.) o conductă cilindrică de rază r_0 , orientată în lungul axei Ox .

Rescrisă în coordonate cilindrice ecuația Navier - Stokes (5.27) capătă forma:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \quad (5.35)$$

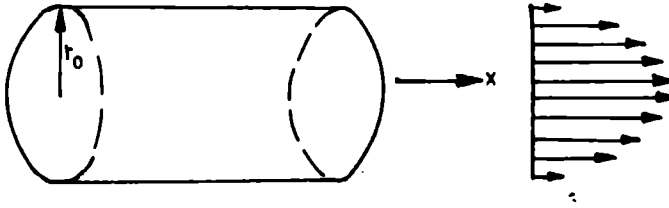


Figura 5.3: Mișcarea fluidelor printr-o conductă circulară

Ca și în cazul precedent, al curgerii printr-o fisură, observăm că termenul din stânga al ecuației (5.35) este funcție doar de x , iar termenul din dreapta este funcție numai de raza r . Egalitatea este posibilă doar în cazul în care fiecare din cei doi termeni este constant. Avem:

$$\frac{dp}{dx} = C \quad (5.36)$$

$$\frac{\mu}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = C \quad (5.37)$$

Integrarea ecuației (5.37) conduce la expresia vitezei în forma:

$$\begin{aligned} r \frac{dV_r}{dr} &= \frac{Cr^2}{2\mu} + C_2 \\ V_r &= \frac{Cr^2}{4\mu} + C_2 \ln r + C_3 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Constanta C_2 este nulă deoarece viteza trebuie să aibă valori finite inclusiv în axul tubului. De asemenea, modelul newtonian al curgerii impune ca viteza să aibă valori nule la contactul cu pereții tubului. Aceasta revine la condiția de margine:

$$r = r_0 ; v_r = 0$$

$$C = -\frac{Cr_0^2}{4\mu} \quad (5.39)$$

Inlocuind valorile constantelor obținem în final:

$$V = \frac{C}{4\mu}(r^2 - r_0^2) \quad (5.40)$$

sau, conform ecuației (5.36)

$$V = \frac{r^2 - r_0^2}{4\mu} \text{grad}p \quad (5.41)$$

Se observă că distribuția vitezei în lungul razei este parabolică, cu valori maxime în ax.

Expresia debitului se obține prin integrarea vitezelor pe secțiunea tubului:

$$Q = \int_0^{r_0} V(2\pi)dr = \frac{2\pi}{4\mu} \text{grad}p = \text{grad}p \int_0^{r_0} (r^2 - r_0^2)dr = \frac{\pi r_0^4}{4\mu} \text{grad}p \quad (5.42)$$

Vom face observația că, într-o primă aproximație (grosieră, de altfel) porii sau fracturile rocilor pot fi echivalate cu o distribuție uniformă de n conducte cilindrice, respectiv de n fisuri plan -- paralele. Vom defini atunci *porozitatea mediului*, raportul dintre aria golurilor și aria totală de curgere A . Avem atunci:

$$\omega = \frac{n\pi r^2}{A} \quad (5.43)$$

pentru 'mediul poros', respectiv:

$$\omega = \frac{ne}{l} \quad (5.44)$$

peu ru 'mediul fisurat'.

Neglijând pentru moment forțele masice din relația (5.33) debitele pot fi puse atunci sub forma:

$$Q = A \frac{C}{\mu} \text{grad}p \quad (5.45)$$

Această relație sugerează că mișcarea fluidelor în roci este caracterizată de următoarele aspecte:

- forțele generalizate, care pun în mișcare fluidul sunt reprezentate de *gradientul presiunii*, iar debitul - efectul acțiunii lor - este proporțional cu acestea;
- debitul este invers proporțional cu vâscozitatea fluidului și proporțional cu aria totală de curgere A ;
- debitele sunt proporționale cu un factor C , caracteristic geometriei discontinuităților, având expresia:

$$C = \frac{\omega^2 r_0^2}{8} \quad (5.46)$$

pentru 'mediul poros', respectiv:

$$C = \frac{\omega e^2}{12} \quad (5.47)$$

pentru 'mediul fisurat'.

Așa cum se va arăta în partea a doua acest rezultat a fost demonstrat experimental de către Darcy, iar ecuația (5.45) reprezintă legea de mișcare a fluidelor în medii poroase sau fracturate.

6. ECUATIA BERNOULLI.

Ecuatia Bernoulli exprimă conservarea energiei mecanice a unei particule dintr-un fluid ideal ce se mișcă în lungul unei linii de curent. Rezultatul poate fi însă aplicat și în cazul unui tub subțire de curent. Legea Bernoulli introduce noțiunile de *sarcină și nivel piezometric*, mărimi esențiale în hidraulică. Generalizarea rezultatelor pentru probleme bidimensionale este posibilă numai în cazul câmpurilor irotaționale.

6.1. Mișcarea în lungul unei linii de curent.

Se considerăm o linie de curent în mișcarea unui fluid ideal și fie t versorul tangentei la această curbă într-un punct oarecare. Dacă procesul este staționar, mișcarea fluidului este descrisă de ecuația Euler (5. 5.) pe care o vom rescrie pentru claritatea prezentării :

$$\bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0 \quad (6.1)$$

Să proiectăm toți termenii ecuației Euler pe direcția t .

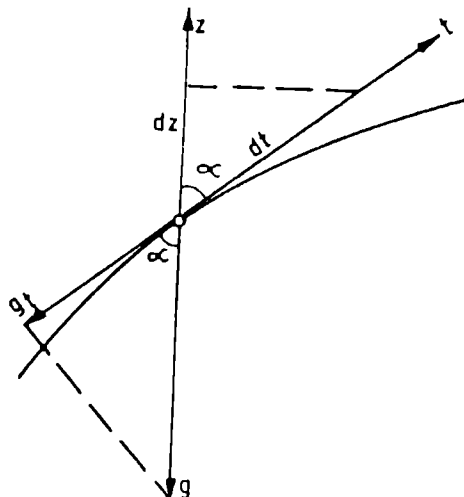


Figura 6.1

Dacă axa OZ este orientată vertical în sus atunci proiecția accelerației gravitației pe direcția t este (Figura 6.1) :

$$g_t = |g| \cos \alpha = |g| \frac{dz}{dt} \quad (6.2)$$

Cum proiecția gradientului pe o direcție este derivata funcției scalare după acea direcție , al doilea termen din ecuația Euler devine :

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p|_t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (6.3)$$

În fine cel de-al treilea termen din ecuația (6.1) se transformă utilizând identitatea :

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \bar{v} \times \text{rot } v$$

Proiectând fiecare termen al acestei ecuații pe direcția t obținem :

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2|_t = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \quad (6.4)$$

respectiv :

$$\bar{v} \times \text{rot } \bar{v}|_t = 0$$

deoarece vectorul $\bar{v} \times \text{rot } \bar{v}$ este normal pe viteza \bar{v} .

Atunci înlocuind cei trei termeni (6.2 , (6.3) , (6.4) în ecuația Euler (6.1) obținem în definitiv :

$$|g| \frac{dz}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = 0$$

sau :

$$\frac{d}{dt} \left[gz + \frac{1}{\rho} p + \frac{v^2}{2} \right] = 0 \quad (6.5)$$

Deoarece fluidul este incompresibil densitatea rămâne constantă în lungul liniei de curent și ecuația precedentă se integrează imediat :

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C_1$$

unde C_1 este o constantă . Împărțind cu g astfel încât termenii sumei să aibă dimensiuni de lungime obținem forma definitivă a ecuației Bernoulli conform căreia pentru un fluid ideal în regim staționar, în lungul oricărei linii de curent :

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H \quad (6.6)$$

este constantă . Constanta H poartă numele de *sarcină hidraulică totală* . Semnificația fizică a sarcinii hidraulice precum și a termenilor care o alcătuiesc rezultă din analiza bilanțului energetic în lungul unei linii de curent și să fie prezentată în paragraful 6.2.

Observații

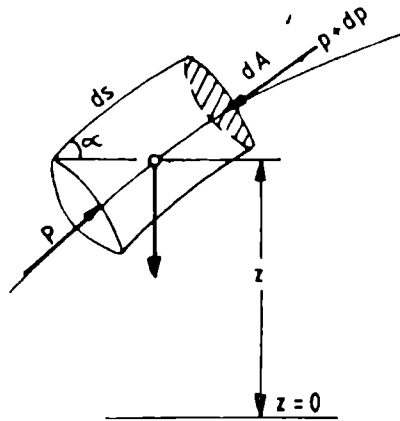


Figura 6.2: Mișcarea unei particule în lungul unei linii de curent.

1^o. Ecuația Bernoulli poate fi dedusă direct, din ecuația de mișcare a fluidului, fără a mai recurge la ecuația Euler. Fie (Figura 6.2) un volum infinitesimal de arie dA și lungime dS , care înfășoară o linie de curent.

Componentele forțelor ce acționează în lungul liniei de curent sunt :

- forțe de presiune $p dA - (p + dp) dA = -dp dA$

- componenta greutății $-dAdS \sin \alpha = -dAdS \rho g dz / dS = -\rho g a \, dz$

În lungul liniei de curent accelerația volumului infinitesimal are expresia :

$$a_t = v \frac{dv}{dl} + \frac{dv}{dt}$$

și deoarece procesul este staționar $\frac{dv}{dt} = 0$.

Cum masa volumului elementar este $\rho dA dl$, atunci conform legii lui Newton mișcarea acesteia este descrisă de ecuația :

$$-\frac{dp}{\rho} + g dz + v dv = 0 \quad (6.7)$$

Scrisă în forma (6.7) ecuația de mișcare a fluidului se mai numește și ecuația Euler monodimensională.

Deoarece fluidul este incompresibil această ecuație se integrează ușor. Avem :

$$d\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z\right) = 0$$

Regăsim astfel ecuația (6.6).

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{const.}$$

2^o. Termenii ecuației Bernoulli au dimensiuni de lungime . Dacă înmulțim ecuația (6.6) cu ρ atunci termenii ecuației vor avea dimensiuni de presiune , iar constanta din membrul drept va avea altă semnificație fizică . Avem :

$$p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} = C \quad (6.7)$$

Fie z cota centrului de masă a volumului elementar față de un referențial oarecare (Figura 6.3) . Termenii ecuației (6.7) reprezintă atunci :

p : presiunea statică

$\rho g z$: presiunea de poziție

$\frac{\rho v^2}{2}$: presiunea dinamică iar constanta C se numește presiunea totală a fluidului .

În termeni de presiune legea Bernoulli poate fi atunci formulată astfel:

Pentru un fluid ideal în condițiile curgerii staționare suma presiunilor statice , dinamice și de poziție este constantă în lungul oricărei linii de curent.

3^o. Așa cum a fost dedusă relația Bernoulli este valabilă numai în lungul unei linii de curent . Dacă considerăm o linie de curent vecină este de presupus că fiecare din componentele presiunii variază . Suma celor trei presiuni rămâne constantă în lungul acestei linii , dar valoarea constantei se schimbă. Să considerăm însă un tub de curent subțire astfel încât :

- secțiunea dA este suficient de mică astfel încât atât variațiile cotei z cât și ale presiunii în orice punct al suprafeței să fie neglijabile ;
- mișcarea fluidului să fie uniformă ;

În aceste condiții constanta din membrul drept al ecuației (6.7) nu se modifică și legea Bernoulli poate fi generalizată pentru un tub subțire de curent :

În cazul mișcării staționare a unui fluid ideal presiunea totală în lungul unui tub de curent este constantă .

6.2. Semnificația energetică a legii Bernoulli .

Să considerăm, pentru claritatea demonstrației , un tub subțire de curent pe care îl vom asimila cu un volum de control . La momentul t fluidul ocupă domeniul $I+R$ iar la momentul $t+dt$ domeniul $R+E$. (Figura 6.3) .

Fiind vorba de mișcarea unui fluid ideal în regim staționar ecuația de continuitate are forma:

$$v_1 dA_1 = v_2 dA_2 \quad (6.8)$$

sau :

$$A_1 dx_1 = A_2 dx_2 \quad (6.9)$$

unde dx_1 și dx_2 sunt distanțele parcurse de secțiunile A_1 și A_2 în intervalul de timp dt .

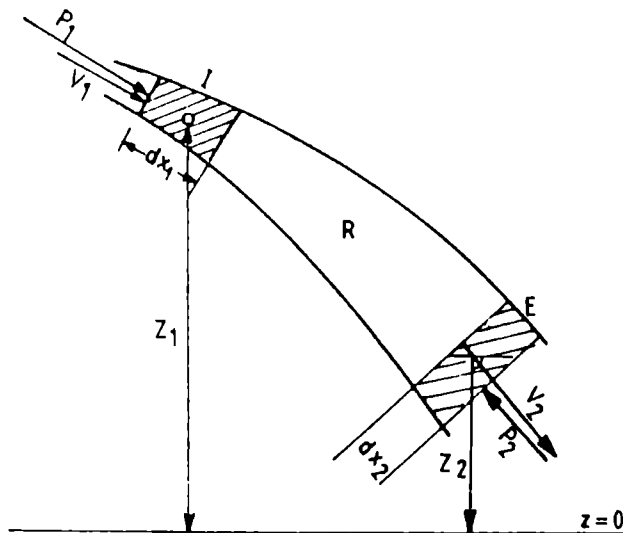


Figura 6.3: Conservarea energiei în lungul unui tub de curent

Fie $F_1 = p_1 A_1$ respectiv $F_2 = p_2 A_2$ forțele exterioare (de legătură) exercitate asupra sistemului (fluidul din volumul de control).

Conform teoremei energiei mecanice variația energiei totale a unui sistem într-un interval de timp este egală cu lucrul mecanic al forțelor exterioare. La momentul t energia totală a sistemului este $E_I + E_R$ iar la momentul $t + dt$, $E_R + E_E$ unde am notat cu E_I , E_R , E_E energia corespunzătoare volumului I , R , E . În intervalul dt variația energiei totale ΔE va fi deci :

$$\Delta E = E_E + E_R - (E_R + E_I) = E_E - E_I \quad (6.10)$$

Energia în volumul I fiind suma energiilor cinetice și potențiale ale fluidului cuprins în acest volum avem :

$$E_I = \rho A_1 dx_1 \frac{v_1^2}{2} + \rho g A_1 dx_1 z_1 \quad (6.11)$$

În mod asemănător energia fluidului din volumul E are expresia

$$E_E = \rho A_2 dx_2 \frac{v_2^2}{2} + \rho g A_2 dx_2 z_2 \quad (6.12)$$

astfel încât variația energiei totale în intervalul de timp dt devine :

$$\Delta E = \rho A_2 dx_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \rho A_1 dx_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) \quad (6.13)$$

În acest interval de timp lucrul mecanic al forțelor exterioare este :

$$L = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = p_1 A_1 dx_1 - p_2 A_2 dx_2 \quad (6.14)$$

Egalând lucrul mecanic al forțelor exterioare cu variația energiei totale și regrupând termenii obținem :

$$\rho A_2 dx_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - p_2 A_2 dx_2 = \rho A_1 dx_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) - p_1 A_1 dx_1 \quad (6.15)$$

Prin împărțirea cu ρg și ținând seama de ecuația de continuitate (6.9), relația (6.15) ne conduce la forma (6.6) a ecuației Bernoulli :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = H \quad (6.16)$$

Trebuie remarcat că ecuația (6.16) a fost obținută prin împărțirea ecuației (6.15) la un produs de forma $\rho g A dx$, care reprezintă masa de fluid care s-a mișcat în intervalul de timp dt .

Rezultă astfel semnificația fizică a constantei H denumită *sarcina hidraulică*, din legea lui Bernoulli: ea reprezintă energia specifică a unității de greutate a fluidului în mișcare și are trei termeni:

- energia potențială gravitațională specifică z ce reprezintă lucrul mecanic necesar ridicării unității de greutate de fluid la cota z ,
- energia potențială de presiune $p/\rho g$ și reprezintă lucrul mecanic pe care îl poate efectua unitatea de greutate de fluid sub acțiunea forței de presiune. Acești doi termeni alcătuiesc energia potențială totală a unității de fluid și caracterizează configurația sistemului la un moment dat.
- energia cinetică $v^2/2g$ care reprezintă lucrul mecanic necesar pentru a imprima unității de greutate viteza v .

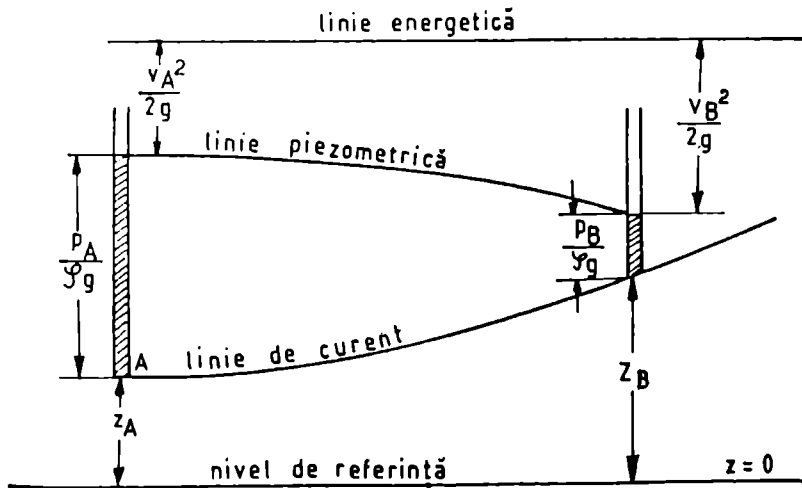


Figura 6.4: Liniile de sarcină energetică și piezometrică.

În mod analog putem stabili și semnificația energetică a formei în presiune (6.7) a ecuației Bernoulli. Dacă vom simplifica ecuația (6.15) cu produsul $A dx$, conform ecuației de continuitate (6.9) obținem:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2 = \text{const.} = \Pi \quad (6.17)$$

Ținând seama de faptul că produsul $A dx$ reprezintă volumul de fluid care s-a deplasat în timpul dt presiunea totală II reprezintă energia specifică unității de volum .

Indiferent deci de forma în care este scrisă legea lui Bernoulli nu reprezintă altceva decât o formă a legii conservării energiei pentru un fluid ideal .

Fie atunci două puncte oarecare A și B ale unei linii de curent unde am plasat două tuburi piezometrice (*Figura 6.4*) . Sarcina hidrolică H fiind constantă este atunci reprezentată printr-o linie orizontală , paralelă cu nivelul referință $z=0$, linie denumită nivel energetic sau linie energetică . Înălțimea $h=p/\rho g$ la care se ridică apa în tubul piezometric , denumită cota piezometrică reprezintă înălțimea unei coloane de fluid a cărei presiune hidrostatică echilibrează presiunea fluidului în punctul respectiv . Curba ce unește punctele $z + p/\rho g$, punctele ce definesc energia potențială totală , reprezintă linia piezometrică . De remarcat faptul că linia piezometrică poate fi măsurată direct . Diferența dintre nivelul energetic și linia piezometrică reprezintă nivelul cinetic - energia cinetică specifică unității de greutate în punctul respectiv .

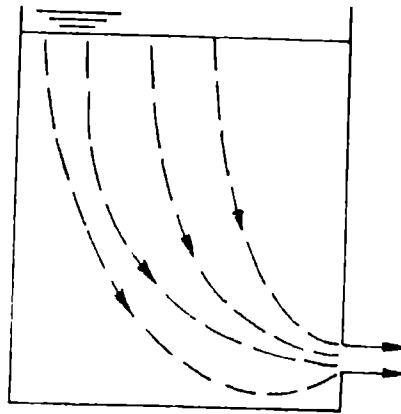


Figura 6.5: Curgerea printr-un orificiu.

6.3 Aplicații ale ecuației Bernoulli

Dintre numeroasele aplicații ale relației Bernoulli vom prezenta doar câteva și anume acelea care permit măsurarea directă a unor parametri.

Formula Toricelli .

Fie un rezervor prevăzut cu un micro orificiu la partea inferioară . Rezervorul este suficient de mare astfel încât poziția suprafeței libere să nu se modifice în intervalul de timp considerat .

Dacă h este înălțimea la care se află orificiul de suprafața liberă ne propunem să calculăm viteza fluidului la ieșirea prin orificiu în următoarele ipoteze :

- tot fluidul participă la mișcare
- jetul format la ieșirea din orificiu prezintă o zonă contractată în care curgerea este uniformă

(Figura 6.5).

Atunci în lungul oricărei linii de curent a orificiului - de exemplu BC - cota și viteza v fiind constante presiunea este constantă și egală cu presiunea atmosferică p_0 .

Luând ca nivel de referință orizontala BC atunci aplicând legea Bernoulli pentru linia de curent AB avem :

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (6.18)$$

Cum suprafața liberă a fost presupusă imobilă $v_A = 0$ și obținem pentru viteze la ieșire :

$$v_B = \sqrt{2gz + 2 \frac{p_A - p_0}{\rho}} \quad (6.19)$$

Cazuri particulare :

a. Curgerea unui lichid : În acest caz se alege presiunea atmosferică drept presiune de referință. Atunci $p_0 = 0$ și relația (6.19) devine :

$$v = \sqrt{2gz} \quad (6.20)$$

cunoscută și sub numele de relația Toricelli .

b. Curgerea unui gaz : densitatea gazului fiind redusă , termenul gravitațional din formula lui Bernoulli poate fi neglijat ,atunci obținem :

$$v = \sqrt{2 \frac{p_A - p_0}{\rho}} \quad (6.21)$$

2 Fenomenul Venturi

Vom considera o conductă orizontală cu secțiunea variabilă în care curge un fluid sub presiune. În cazul în care viteza este constantă în lungul oricărei secțiuni, conducta poate fi echivalată cu un tub de curent.

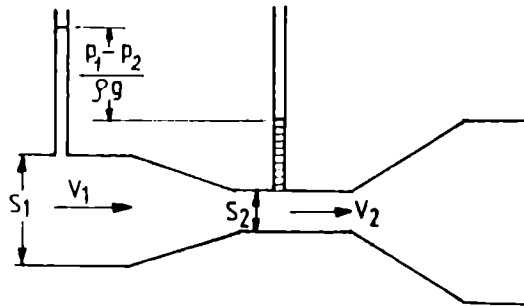


Figura 6.6: Tub Venturi

Fie două secțiuni oarecare A și B , $S_A > S_B$ (Figura 6.6). Conform ecuației de continuitate avem :

$$Q = V_A S_A = V_B S_B \quad (6.22)$$

Cum $S_A > S_B$ rezultă imediat că $V_B > V_A$. Pentru aceleași secțiuni legea Bernoulli are expresia :

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{v_B^2}{\rho g} + \frac{p_B^2}{2g} \quad (6.23)$$

Deoarece $V_A < V_B$ rezultă imediat că $p_A > p_B$. Fenomenul Venturi poate fi atunci formulat astfel Într-o conductă cu secțiune variabilă , presiunea statică crește în timp ce viteza fluidului scade o dată cu secțiunea conductei .

Dacă în cele două secțiuni A și B deschidem două puncte de priză , cele două piezometre montate vor indica diferențe de presiune statică .

Aceste două piezometre alcătuiesc un dispozitiv denumit tub Venturi , care permite măsurarea debitelor .

Eliminând vitezele din relațiile (6.22) și (6.23) avem :

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{Q^2}{2S_A^2 g} = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{Q^2}{2S_B^2 g} \quad (6.24)$$

și

$$Q = \frac{\sqrt{2g} S_B}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2}} \sqrt{\frac{p_A - p_B}{\rho g}} \quad (6.25)$$

Diferența $p_A - p_B$ este determinată de cele două tuburi piezometrice , toți ceilalți factori depinzând de geometria conductei și sunt de aceea cunoscuți .

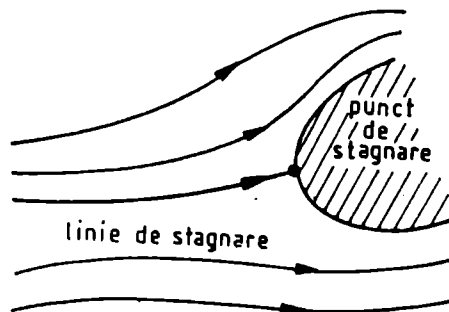


Figura 6.7: Punct de stagnare.

Observații

1^o Rezultatele precedente sunt valabile numai în măsura în care ipoteza făcută - echivalarea conductei cu un tub de curent subțire - este respectată . Experiența arată însă că ipoteza este valabilă doar pentru variații mici de secțiune: când unghiul α de racord (Figura 6.6) depășește 7^o vitezele într-o secțiune nu mai sunt constante.

Pentru valori mari ale unghiului de racord , liniile de curent se “deslipesc “ de pe pereții conductei și curgerea devine local cu nivel liber .

2^o Micșorări mari ale secțiunii conduc la micșorări corespunzătoare ale presiunii astfel încât în cazul lichidelor poate fi depășită presiunea vaporilor saturanți la temperaturi de curgere .Lichidul începe atunci să fiarbă brusc , fenomen denumit *cavitație* : bulele de gaz se degajă iar ecuația de continuitate scrisă numai pentru faza lichidă își pierde evident, valabilitatea .

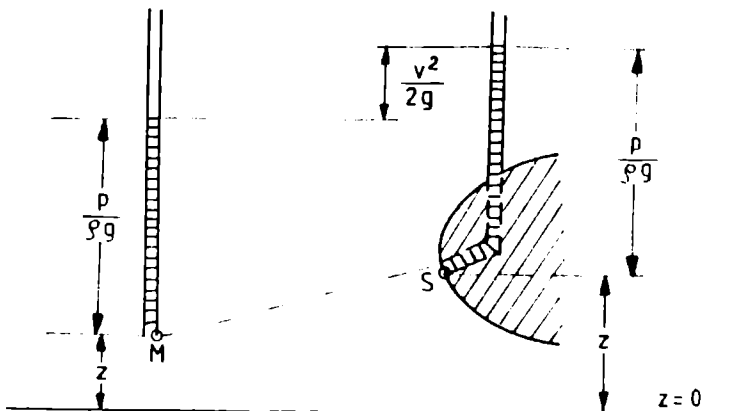


Figura 6.8: Presiunile într-un punct oarecare (M) și într-un punct de stagnare (S)

Punct de stagnare . Tub Pitot .

Dacă într-un fluid în mișcare permanentă se află un obstacol solid liniile de curent vor fi divergente,ocolind obstacolul . Există atunci un punct S (Figura 6.7) care separă cele două direcții de curgere și în care viteza fluidului este nulă .

Acest punct în care viteza fluidului se anulează se numește punct de stagnare și există întotdeauna o linie de curent care este limitată de acest punct . Fie un punct oarecare M al acestei linii . Ecuația Bernoulli scrisă pentru acest punct și punctul de stagnare S devine (Figura 6.8) :

$$P_M + \rho g z_{1M} + \rho \frac{v_M^2}{2} = P_S + \rho g z_{1M} \quad (6.26)$$

Fie AB linia de sarcină corespunzătoare acestei linii de curent . Atunci un piezometru deschis în punctul S va măsura sarcina hidraulică totală H_S , deoarece în acest punct viteza este nulă . Un piezometru deschis în M va măsura doar suma P_M a presiunilor statice și de poziție .
Avem:

$$H_S = \frac{P_S}{\rho g} + z_S \quad (6.27)$$

$$P_M = \frac{P_M}{\rho g} + z_M$$

și relația Bernoulli devine:

$$\frac{v_M^2}{2g} + P_M = H_S \quad (6.28)$$

Evident nivelul în piezometrul M este întotdeauna mai mic decât cel din punctul de stagnare, diferența dintre ele fiind egală cu presiunea dinamică .

Această observație stă la baza construirii tubului Pitot , instrument cu ajutorul căruia se măsoară viteza fluidului .

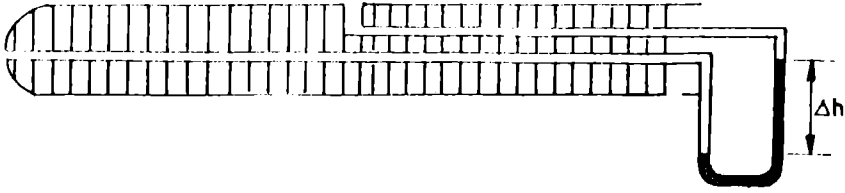


Figura 6.9: Tub Pitot

El este alcătuit dintr-un tub care are o priză de presiune totală ,deschisă în punctul de stagnare S (Figura 6.9) și o priză de presiune statică deschisă în punctul M .

În cazul unui gaz termenii gravitaționali sunt neglijabili și din relația (6.26) deducem :

$$v = \sqrt{2 \frac{p_S - p_M}{\rho}}$$

Diferența $p_S - p_M$ poate fi măsurată cu-un manometru diferențial legat la cele două prize .

În cazul unui lichid relația (6.) conduce la :

$$v = \sqrt{2g(H_S - P_M)}$$

diferența $H_S - P_M$ fiind măsurată direct de două piezometre deschise în punctele de priză S și M .

6.4. Ecuația Euler în mișcarea bidimensională

Ca și în cazul mișcării monodimensionale ecuația Euler poate fi dedusă din particularizarea ecuațiilor Navier - Stokes pentru un fluid ideal sau direct scriind echilibrul unui element infinitesimal .

Să considerăm deci regimul staționar al unui fluid ideal . În condițiile unei probleme bidimensionale și în cazul unei mișcări permanente ecuațiile Navier - Stokes devin :

$$\bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$$

sau notând cu v_x și v_y componentele vitezei :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6.29)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + g$$

Împreună cu ecuația de continuitate :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.30)$$

ecuațiile lui Euler (6.29) alcătuiesc un sistem de trei ecuații care pentru condiții de margine date permit calculul câmpului de presiuni și al vitezelor .

Cu observația că în abordarea euleriană accelerația este descrisă de derivata substanțială a vitezei , ecuațiile (6.29) pot fi deduse direct studiind mișcarea unui element infinitesimal (Figura 6.11) .

Accelerația acestui element este :

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right] dx dy \quad (6.31)$$

Ținând seama de caracterul staționar al mișcării $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$ componentele accelerației devin :

$$-\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (6.32)$$

respectiv :

$$-\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \quad (6.33)$$

Forțele distribuite pe cele două fețe cu lungimea dy a elementului au o rezultantă în centrul elementului având expresia :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \quad (6.34)$$

Similar componentele forțelor de presiune aplicate pe cele două fețe cu lungimile dx au o rezultantă : $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy$. Deoarece pe verticală acționează și forțele masice de greutate a căror intensitate este $\rho g dx dy$, rezultanta forțelor pe verticală este:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy + \rho g dx dy \quad (6.35)$$

Scriind legea a doua a mecanicii pe cele două direcții și ținând seama că masa elementului este $\rho dx dy$ regăsim ecuațiile Euler (6.1) .

6.5 Ecuația Bernoulli în cazul mișcării bidimensionale

Ca și în cazul curgerii monodimensionale , ecuația Bernoulli rezultă din integrarea ecuațiilor Euler , pentru regim staționar . Pentru a pune în evidență diferențialele totale ale presiunii și vitezei vom amplifica prima ecuație (6.29) cu dx și a doua cu dy . Prin adunarea celor două ecuații obținem :

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy + g dy \quad (6.36)$$

Dacă adunăm și scădem primei paranteze termenul : $v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} dx$ celei de a doua $v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} dy$

obținem după rearanjarea termenilor :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy + \quad (6.37)$$

$$(v_x dy - v_y dx) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + g dz = 0$$

Din examinarea rezultatului obținut constatăm că :

- membrul stâng reprezintă diferențiala totală dp a presiunii
- primii doi termeni ai membrului drept reprezintă $\frac{1}{2}$ din diferențiala modulului vitezei $V(V_x, V_y)$

$$\frac{1}{2} d(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

- termenul $\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$ reprezintă modulul rotaționalului vitezelor .

Atunci ecuația precedentă poate fi rescrisă în forma :

$$\frac{dp}{\rho g} + \frac{1}{2g} dv^2 + dz = -\frac{1}{g} |\text{rot}v| (v_x dy - v_y dx) \quad (6.38)$$

Integrând pe tot domeniul de mișcare avem în definitiv :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g} v^2 + z = H - \frac{1}{g} |\text{rot}v| |v_x dy - v_y dx| \quad (6.39)$$

unde prin H am notat constanta de integrare .

În cazul în care câmpul este irotațional $|\text{rot}v| = 0$ ecuația precedentă se reduce la ecuația Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g} v^2 + z = \text{const.} = H \quad (6.40)$$

Cu alte cuvinte în regim staționar și în condițiile regimului laminar de curgere energia specifică H a masei fluidului este constantă în orice punct al acestuia .

7 MEDIUL POROS . CARACTERIZARE CANTITATIVA .

Mișcarea apei subterane este esențial diferită de mișcarea apelor de suprafață prin faptul că au loc printr-un sistem de discontinuități cu geometrie variabilă care alcătuiesc sistemul de pori și de fisuri ale rocilor.

Intuitiv putem defini mediul poros ca un mediu bifazic alcătuit din faza solidă - roca - și faza fluidă - apa , țițeiul , aerul - care curge prin porii rocii . Mediul poros este deci un mediu discontinuu , continuitatea solidului fiind întreruptă de prezența porilor .

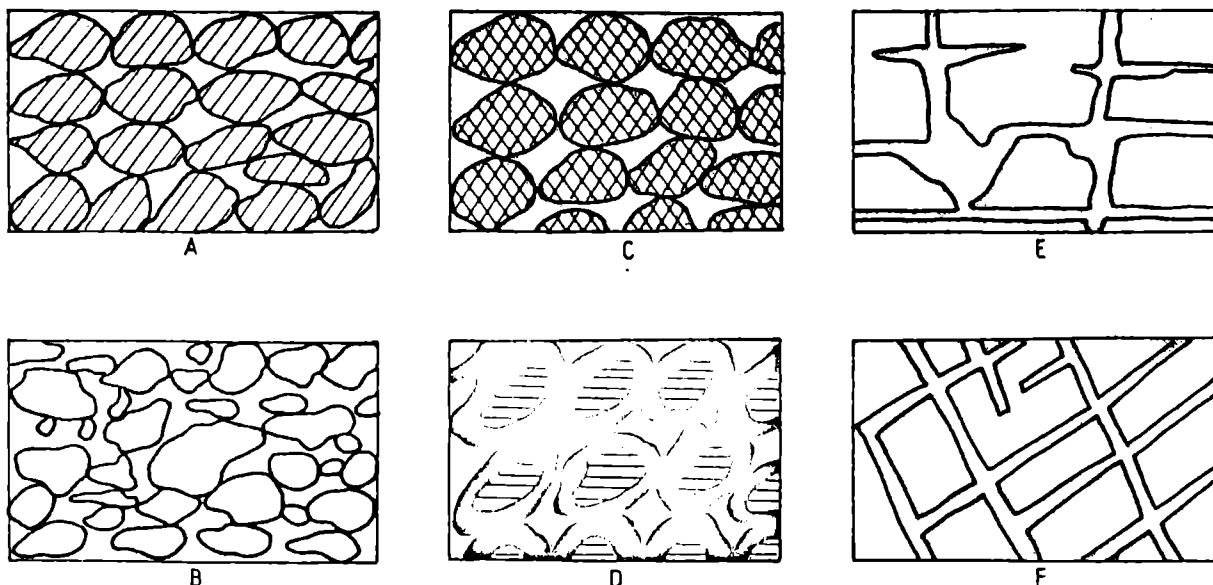


Figura 7.1: Tipuri de discontinuități

În funcție de momentul formării lor, discontinuitățile rocilor se pot clasifica în discontinuități primare și secundare. Discontinuitățile primare caracterizează în special rocile sedimentare și vulcanice și s-au format simultan cu roca.

Interstițiile sau discontinuitățile secundare sunt posterioare formării rocilor și sunt datorate eforturilor tectonice sau proceselor de dizolvare.

Dimensiunile discontinuităților prezintă o mare varietate ordinul lor de mărime fiind cuprins între câțiva angströmi în cazul defecțiunilor rețelelor cristaline, până la kilometri în cazul carsturilor. Figura 7.1 prezintă câteva tipuri de discontinuități. Sedimentele cu

granulometrie uniformă (*Figura 7.1a*) prezintă spații mari între granulele solide, spre deosebire de cele cu granulometrie variabilă care au goluri de dimensiuni reduse (*Figura 7.1b*). Chiar dacă granulometria sedimentelor este uniformă, volumul total al golurilor poate crește atunci când particulele prezintă ele însele, discontinuități (*figura 7.1c*), care poate fi micșorat atunci când au loc depuneri minerale în interstițiile inițiale (*Figura 7.1d*). În toate aceste exemple discontinuitățile prezintă extinderi comparabile pe cele trei direcții și alcătuiesc *porii* rocii. Spre deosebire de pori, fisurile și fracturile au extinderi mari pe una din direcții chiar dacă formarea lor este datorată tectonice (*Figura 7.1e*) sau proceselor de dizolvare (*Figura 7.1f*).

În general discontinuitățile primare sunt reprezentate prin pori iar cele secundare prin fisuri.

7.1. Caracteristicile mediului poros.

Cantitativ volumul discontinuităților este caracterizat de porozitatea totală (n) a rocii a cărei expresie este dată de raportul dintre volumul total al porilor (V_p) și volumul total al rocii V . Avem atunci :

$$n = V_p / V \quad (7.1)$$

În geotehnică este utilizată frecvent noțiunea de indice a porilor (e) definit ca raportul dintre volumul total al porilor (V_p) și volumul matricii solide V_s :

$$e = V_p / V_s \quad (7.2)$$

Între cele două mărimi există relațiile evidente :

$$\begin{aligned} e &= \frac{n}{n-1} \\ n &= \frac{e}{e+1} \end{aligned} \quad (7.3)$$

În hidraulica subterană interesează posibilitatea fluidului de a circula prin rocă . Va trebui deci să distingem între porozitatea totală n și gradul de interconexiune al porilor , proprietate care permite fluidului să circule iar rocii să fie permeabilă . Fie V_c volumul porilor interconectați . Vom defini atunci porozitatea eficace sau cinematică n_{ef} raportul :

$$n_{ef} = V_c / V \quad (7.4)$$

Mărimile precedente au fost definite în funcție de volum . Putem defini aceleași mărimi în funcție de suprafață . Să considerăm atunci o secțiune S a mediului poros și să notăm S_p suprafața totală și respectiv cu S_c suprafața porilor interconectați , intersectate de secțiunea S . Vom defini porozitatea de suprafață totală n_s raportul :

$$n_s = S_p / S \quad (7.5)$$

În mod analog vom defini porozitatea de suprafață eficace (cinematică) n_{sc} raportul :

$$n_{sc} = S_c / S \quad (7.6)$$

Evident porozitățile de suprafață depind de secțiunea aleasă . În practică se consideră însă în mod tacit că distribuția și dimensiunile porilor sunt pur aleatoare și descrise de o lege normală . Atunci porozitățile de suprafață sunt independente de secțiune și practic egale cu cele de volum .

Suprafața specifică a unui mediu poros este definită ca raportul între suprafața totală S_t a porilor și volumul total V al mediului poros :

$$S_{sp} = S_t / V \quad [L^{-1}] \quad (7.7)$$

Din punct de vedere al morfologiei porilor vom împărți două categorii de discontinuități :

- roci poroase propriu zise în care dimensiunile porilor sunt comparabile pe toate cele trei direcții .

- roci fracturate în care dimensiunile discontinuităților pe o direcție sunt neglijabile comparativ cu dimensiunile pe celelalte direcții .

Porozitatea rocilor depinde deci de natura acestora de forma și aranjamentul spațial al porilor dar și de procesele tectonice și diagenetice care au afectat formațiunea respectivă .

Din această cauză ordinele de mărime ale porozității sunt extrem de variate . În tabelul 7.1 sunt prezentate rezultatele măsurătorilor efectuate pentru diferite tipuri de roci .

Tabelul 7.1

POROZITATEA TOTALĂ A ROCILOR

TIPUL DE ROCI	POROZITATE %
1. Roci neconsolidate	
pietriș grosier	24 - 36
pietriș fin	25 - 38
nisip grosier	31 - 46
nisip fin	26 - 53
prafuri	34 - 61
2. Roci sedimentare	
gresii	5 - 30
calcare - dolomite	0 - 20
calcare carstificate	5 - 50
argile	34 - 60
3. Roci eruptive și metamorfice	
șisturi cristaline slab fracturate	0 - 5
șisturi cristaline fracturate	2 - 10
bazalt	3 - 35
granit alterat	34 - 57
gălbrou alterat	42 - 45

Tabelul 7.2 prezintă , pentru comparație porozitățile totale și cele efective ale mai multor roci și după cum se poate observa valorile acestor parametri diferă în mod curent cu un ordin de mărime iar în cazul rocilor fracturate diferența este și mai mare .

Tabelul 7.2

POROZITATE TOTALĂ ȘI POROZITATE EFECTIVĂ

TIPUL DE ROCĂ EFECTIVĂ	POROZITATE TOTALĂ	POROZITATE
nisip grosier	31 - 46	10 - 15
nisip fin	26 - 53	8 - 17
anhidrit	0.5 - 5	0.05 - 0.5
cretă	5 - 20	0.05 - 0.5
calcar - dolomit	5 - 15	0.1 - 5
sare	0.5	0.1
granit	0.1	0.0005
șisturi cristaline	0 - 10	0.00005 - 0.01

Geometria canalelor alcătuite din pori este puternic neuniformă. Din această cauză la scară locală, a porilor traectoriile particulelor de fluid sunt diferite (*Figura 7.2a*). Să considerăm o secțiune longitudinală într-un por și fie L_{AB} lungimea arcului de traectorie a unei particule între capetele A și B ale porilor. Dacă l_{AB} este lungimea segmentului de dreaptă AB atunci *tortuozitatea* T a porului eate definită de raportul:

$$T = \frac{L_{AB}}{l_{AB}} \quad (7.8)$$

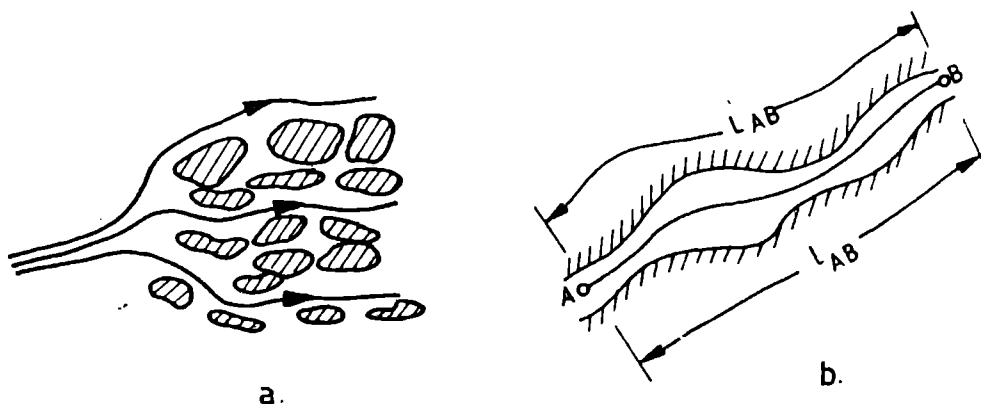


Figura 7.2: Tortuozitatea mediului poros.

Conform acestei relații tortuozitatea este o mărime supraunitară ce caracterizează sinuozitățile structurii poroase. Cu cât valoarea tortuozității este mai mare cu atât tracțiile particulelor între două puncte sunt mai lungi și implicit timpii de parcurgere a distanțelor dintre aceste două puncte sunt mai mari.

7.2 Volumul elementar reprezentativ

În principiu mișcarea apei într-un mediu poros poate fi descrisă utilizând direct legile generale ale hidrodinamicii, prezentate în capitolele anterioare. Ar fi suficient să cunoaștem grosimea tuturor porilor și caracteristicile fizice ale fluidelor pentru a determina, integrând ecuațiile Navier – Stokes, distribuția presiunilor și a vitezelor. Am aplicat această metodă în capitolul 5. În cazul amintit avem însă de a face cu o structură simplă, caracterizată printr-o geometrie și distribuție regulată a discontinuităților, fapt care a permis integrarea cu ușurință a ecuațiilor Navier – Stokes. În realitate atât geometria cât și distribuția porilor nu sunt cunoscute cu precizia cerută de o abordare deterministă nici măcar la scara unei probe, cu atât mai mult la scara acviferului. Se pune atunci problema echivalării mediului poros cu un mediu continuu în care toate mărimile să fie funcție de punct. Această înlocuire ar permite utilizarea directă a ecuațiilor hidraulicii fără să ținem seama de condițiile locale ale mediului poros.

Operația de echivalare constă în fapt în medierea pe volum a proprietăților și rezultatul ei depinde atât de proprietatea aleasă, de poziția punctului în jurul căruia se face modelarea și mai ales de extinderea domeniului pe care se face medierea.

Pentru exemplificare vom considera porozitatea unei probe și vom alege un volum U_n de dimensiuni comparabile cu ale unui por. Porozitatea obținută ar fi valoarea l , dacă am ales spațiul ocupat de un por sau zero dacă volumul respectiv este ocupat de o granulă solidă. Deci pentru probe cu volume mici porozitatea prezintă variații foarte mari. Dacă vom considera probe cu volume V_1, V_2, V_3 (figura 7.3) din ce în ce mai mari vom constata însă că porozitatea prezintă variații tot mai mici, tinzând către o valoare constantă. Există deci o valoare limită (V_s în figura 7.3) dincolo de care porozitatea rămâne practic constantă, indiferent de volumul probei. Intuitiv putem explica rezultatele sintetizate în figura 7.3 prin faptul că în prima parte a experimentului crește probabilitatea de a întâlni pori cu volume diferite, astfel încât porozitatea prezintă variații

importante. Pe măsură, însă ce volumul de probă crește, probabilitatea de a întâlni noi dimensiuni ale porilor scade astfel încât pentru un volum limită (V_{min} în figura 7.3) au fost întâlnite toate dimensiunile posibile ale porilor și porozitatea rămâne constantă. Acest volum dincolo de care nu mai au loc variații semnificative ale porozității se numește *volum elementar reprezentativ* al porozității.

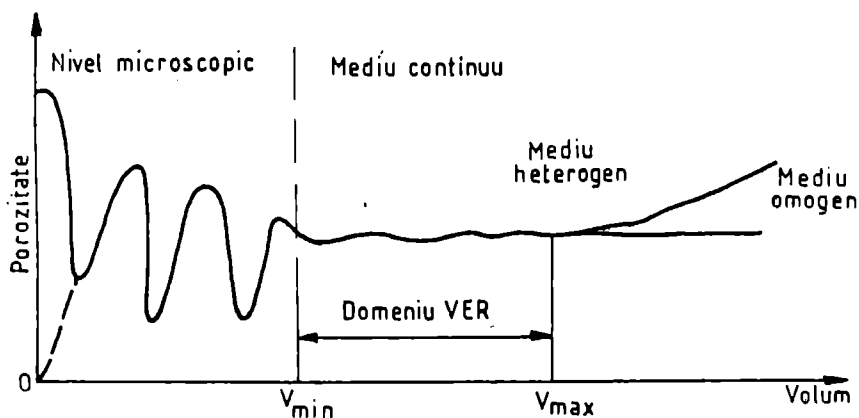


Figura 7.3: Nivele de analiză ale mediului poros

Același raționament poate fi aplicat oricărei proprietăți și defini un volum elementar reprezentativ al proprietății respective. Dacă scara la care se face analiza fenomenului este mult mai mare decât dimensiunea volumului elementar reprezentativ atunci putem înlocui mediul poros discontinuu cu un mediu fictiv dar continuu în care proprietățile sunt funcție continuă de punct. Trebuie subliniat că ordinul de mărime al volumului elementar reprezentativ variază atât în funcție de proprietatea respectivă, cât și de punctul din spațiu în care se face analiza. Spre exemplu în cazul unei roci poroase cum ar fi nisipul, volumul elementar reprezentativ pentru porozitate este de ordinul centimetrilor cubi. Pentru o rocă fracturată însă trebuie considerat un volum de probă mult mai mare pentru a întâlni toate dimensiunile posibile astfel încât mediul fracturat să poată fi întâi echivalat cu un mediu poros și apoi cu un mediu continuu. Volumul elementar reprezentativ este în acest caz de ordinul metrilor sau chiar zecilor de metri cubi.

Sintetizând, deosebim, în cadrul mediului poros, două nivele de analiză:

- Nivelul microscopic, local, la scara porilor în care ținem seama de dimensiunile reale ale acestora. Mediul este discontinuu și proprietățile prezintă fluctuații importante în funcție de mărimea porilor.

- Nivelul macroscopic caracterizat prin parametri empirici, care mediază proprietățile locale, la nivelul microscopic al mediului poros.

Limita de separare dintre aceste două nivele de analiză este dată de volumul elementar reprezentativ. Acesta este evident mai mare decât nivelul microscopic al porilor dar mult mai mic decât domeniul la care se face analiza mișcării fluidului.

Dacă în toate punctele fluidului și pentru toate proprietățile acestuia putem determina un volum elementar reprezentativ putem introduce modelul conceptual al mediului continuu în urma căruia echivalăm mediul poros real dar discontinuu cu un mediu fictiv în care însă toate mărimile sunt reprezentate prin funcții de punct.

În cazul în care există variații de proprietăți la scară egală sau mai mare decât cea a volumului elementar reprezentativ avem de a face cu heterogenități în distribuția proprietăților respective.

7.3. Acvifere și sisteme acvifere

Departate de a fi exhaustivă prezentarea făcută în acest subcapitol bazinelor de apă subterană, se referă doar la prezentarea caracteristicilor generale ale acestora, necesare analizei care urmează a fi făcută în capitolele următoare.

Un acvifer este o formațiune geologică având două caracteristici principale:

permite mișcarea apei în condiții normale, pe distanțe mari, comparabile cu extinderea sa. acumulează volume importante de apă.

Denumirea de acvifer are origine latină din combinarea cuvintelor aqua (apă) și ferre (a purta, a conduce).

Subliniem că pentru a putea fi definită ca acvifer o formațiune geologică trebuie să prezinte ambele caracteristici menționate. Spre exemplu, multe formațiuni argiloase acumulează volume importante de apă dar debitele vehiculate sunt nesemnificative.

O asemenea formațiune geologică capabilă să stocheze volume de apă dar fără să permită curgerea ei în condiții naturale se numește *acviclud*.

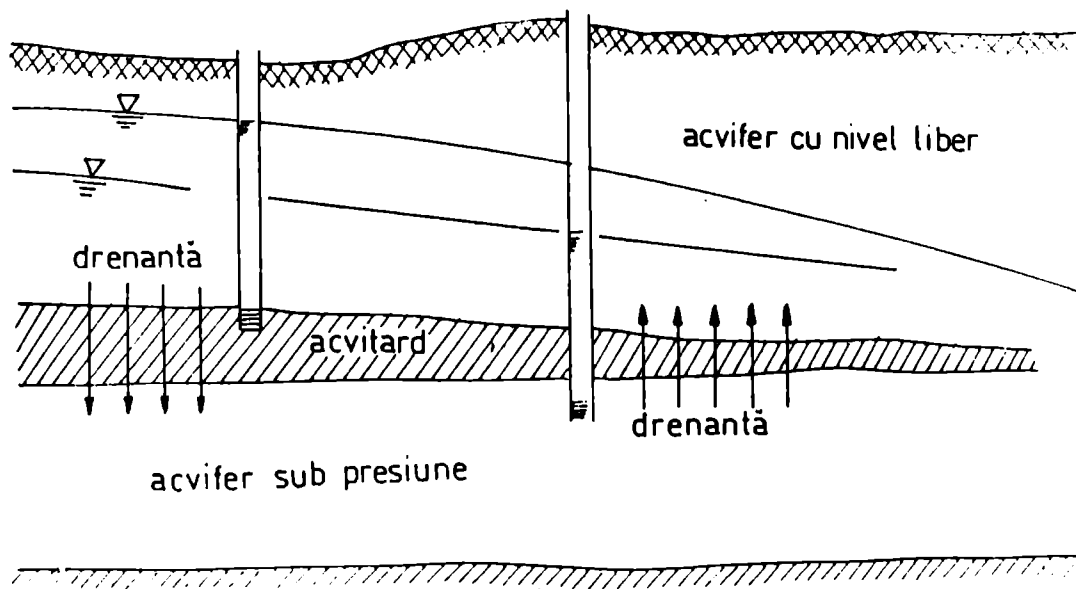


Figura 7.4: Acvifere și sisteme acvifere

Acvitardele sunt formațiuni geologice cu proprietăți intermediare între acvifere și acviclude: ele permit acumularea unui volum relativ redus precum și mișcarea apei cu debit relativ redus comparativ cu cele vehiculate sau stocate în acvifere.

În fine un *acvifug* este o formațiune geologică care nici nu stochează și nici nu permite circulația apei subterane (Figura 7.4).

Un punct de priză poate fi realizat într-un acvifer cu ajutorul unui foraj, deschis în punctul respectiv. Dat fiind modelul conceptual al mediului continuu în punctul de priză se măsoară sarcina piezometrică.

În cazul în care nivelul piezometric este deasupra acoperișului acviferului mișcarea apei subterane se face în principal sub acțiunea gradientului de presiune, iar acviferul este un *acvifer sub presiune*.

Dacă nivelul piezometric este sub acoperișul acviferului avem un *acvifer cu nivel liber*.

Dacă acviferul cu nivel liber se află la mică adâncime el este denumit *acvifer freatic* el fiind alimentat în principal din precipitații.

În realitate nu există o interfață netă de separație între apă și aer, trecerea între cele două faze având loc prin intermediul unei zone nesaturate. La scara acviferului însă această zonă este neglijată, cele două faze (aerul și apa) fiind separate printr-o interfață netă – *suprafață liberă*.

Cele două tipuri de acvifere diferă esențial în posibilitățile de stocare a apei. Într-un acvifer sub presiune acumularea apei implică modificarea proprietății, având loc o deformare a matricii solide datorată variației nivelului piezometric.

Din contră într-un acvifer cu nivel liber acumularea apei se face prin umplerea volumului porilor, matricea solidă având un comportament rigid sub acțiunea variațiilor de presiune.

O structură geologică alcătuită dintr-o succesiune de acvifere, separate prin acvitarde se numește *sistem acvifer*.

Caracteristic sistemelor acvifere este circulația pe verticală, prin drenență verticală între stratele acvifere, prin intermediul acvitardelelor.

8. LEGEA DARCY.

Modelul conceptual al mediului continu permite și în cazul mediilor poroase stabilirea unei ecuații de continuitate ca o consecință a conservării masei. Pentru a stabili însă ecuația generală de mișcare este necesară o relație suplimentară care să exprime relația dintre forțele care pun în mișcare fluidul și efectul acestora (viteze, accelerații). Această relație, denumită *legea de mișcare* trebuie să reflecte rezultatele observațiilor efectuate asupra curgerii fluidelor prin medii poroase. Or, experiența arată că datorită vâscozității fluidului cât și a frecării dintre fluid și matricea solidă sistemul fluid – solid este disipativ.

Conform principiului al doilea al termodinamicii procesul de curgere prin medii poroase este *irreversibil* în sensul că odată ce a avut loc este imposibilă restaurarea configurației inițiale a sistemului, fără a modifica configurația mediului exterior.

Deoarece acest proces disipativ are loc la nivel microscopic legea de mișcare nu poate fi dedusă direct din aceleași considerente pentru care am fost obligați să introducem modelul conceptual al mediului continu: imposibilitatea de a determina atât geometria locală a porilor cât și estimarea pierderilor energetice la contactul solid – fluid.

În consecință legea de mișcare a fluidelor prin medii poroase este o *lege fenomenologică* în sensul că nu poate fi stabilită direct, teoretic, pornind de la legile generale ale mecanicii și numai empiric, ca rezultat al experienței.

8.1 Experimentul Darcy.

Experimentul care a stabilit legea de mișcare a fluidelor prin medii poroase a fost efectuat în 1856 de Henry Darcy în vederea “*determinării legilor de curgere a apei prin nisip*”. Aparatul utilizat (*Figura 8.1*) a constat dintr-un cilindru metalic în mijlocul căruia a fost introdusă o coloană de nisip. La capetele probei au fost montate două manometre deschise.

În timpul experimentului proba a fost parcursă de un debit Q având valori variabile. Pentru fiecare dintre aceste valori a fost măsurată diferența dintre înălțimile coloanei de apă din cele două manometre deschise, denumite de Darcy *nivele piezometrice*.

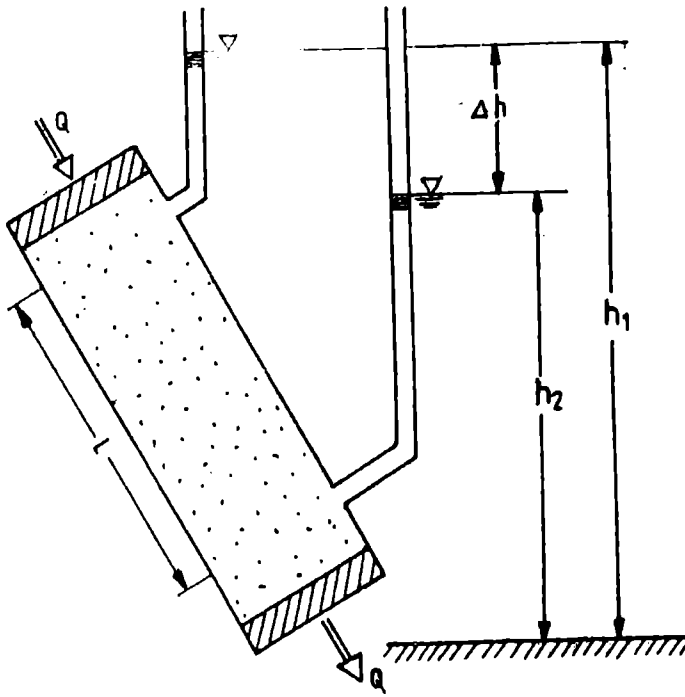


Figura 8.1: Schema experimentului Darcy

Investigând relația dintre diversele mărimi care caracterizează mișcarea apei prin proba de nisip, Darcy a ajuns la concluzia că debitul este proporțional cu diferența $\Delta h = h_1 - h_2$ dintre înălțimea apei în cele două manometre:

$$Q \sim h_2 - h_1 \quad (8.1)$$

Direcția de curgere corespunde diminuării coloanei de apă, deci:

$$Q \sim -\Delta h \quad (8.2)$$

Deasemeni valoarea debitului depinde de dimensiunile probei fiind proporțională cu aria A și invers proporțională cu lungimea L a acesteia. Sintetizând ,rezultatul experimentului Darcy poate fi pus în formula:

$$q = \frac{Q}{A} = -K \frac{\Delta h}{L} = -K i \quad (8.3)$$

unde am notat prin $i = \Delta h/L$, *gradientul nivelului piezometric*, mărime evident adimensională.

În relația precedentă am notat prin q –*debitul specific*, definit ca volumul ce trece prin unitatea de timp prin unitatea de secțiune a probei. Se observă că în definiția dată debitului specific q că am presupus că apa curge prin toată suprafața probei, și nu doar prin aria corespunzătoare porilor. Debitul specific q are deci semnificatia unei viteze aparente în sensul că se presupune că fluidul trece prin toată secțiunea probei. Din această cauză debitul specific este denumit uneori și *viteza Darcy*. Dacă notăm cu n porozitatea probei atunci viteza reală v de curgere a fluidului prin secțiunea dată este:

$$v = q/n \quad (8.4)$$

Coeficientul de proporționalitate K , denumit *conductivitate hidraulică*, ce intervine în relația (8.3) caracterizează proprietățile conductoare ale rocii. El este o mărime macroscopică ce înglobează toate procesele locale care au loc în timpul curgerii la scara microscopică a porilor: variația diametrului porilor, a tortuoziității acestora, a vâscozității fluidului, a frecărilor la contactul solid – fluid, etc. Conform relației (8.3) conductivitatea hidraulică are dimensiuni de viteză și este numeric egală cu debitul specific ce traversează o secțiune dată când la capetele probei se realizează un gradient unitar. Sintetizând, legea Darcy poate fi formulată astfel: într-un mediu poros debitul specific printr-o secțiune normală pe direcția de mișcare este proporțional cu gradientul nivelului piezometric, direcția de curgere fiind în sensul descreșterii nivelului piezometric.

8.2. Sarcina piezometrică

Legea Darcy este o lege empirică: ea stabilește în urma unui experiment relația ce intervine între parametrii care determină curgerea fără însă să răspundă la întrebarea pusă inițial: care este cauza

mișcării? Așa cum am arătat curgerea fluidelor prin medii poroase este un proces pur disipativ energia furnizată inițial fluidului fiind disipată continuu sub formă de căldură.

Direcția de curgere este deci de la zona cu energie mai mare spre zona cu energie mai mică. Determinarea forțelor care pun în mișcare fluidul revine atunci la determinarea energiei mecanice a unității de masă de fluid sau cu alte cuvinte a *potențialului fluidului* într-un anumit punct din spațiu. Cum energia mecanică este o mărime relativă ce măsoară lucrul mecanic necesar efectuării unei transformări între două stări ale sistemului vom alege nivelul mării ca stare inițială, de referință pentru energia fluidului aflat în condiții normale de presiune și temperatură (p_0 și T_0). Vom presupune de asemenea că în aceste condiții inițiale fluidul se află în repaus.

Fie o particulă de fluid situată într-un punct oarecare aflat la cota z față de referențialul ales în care starea fluidului este caracterizată de presiunea p , temperatura T și viteza v .

Potențialul fluidului în acel punct este definit drept lucrul mecanic necesar transformării unității de masă din starea inițială, de referință având parametri p_0 , T_0 , $v=0$, $z=0$ în starea finală caracterizată prin parametri: p , T , z , v .

Pentru a calcula potențialul într-un punct vom imagina o pompă de vid, având masa neglijabilă, situată la nivelul mării în care fluidul se află în condiții standard. Fie V_0 volumul corespunzător unității de masă a fluidului. Atunci lucrul mecanic necesar încărcării izoterme și izobare a corpului pompei cu unitatea de masă de fluid este:

$$L_1 = -p_0 V_0 \quad (8.5)$$

semnul minus datorându-se faptului că sistemul efectuează lucrul mecanic asupra mediului.

Pompa este ridicată la punctul M de cotă z fapt ce necesită lucrul mecanic:

$$L_2 = gz \quad (8.6)$$

În acest punct fluidul este descărcat izobar din pompă în în sistem. Pentru aceasta este necesară, mai întâi comprimarea izotermă a fluidului până la presiunea p , lucrul mecanic efectuat pentru această transformare fiind:

$$L_3 = - \int_{v_0}^v p dV = \int_v^{v_0} p dV \quad (8.7)$$

unde V este volumul masei unitare de fluid la presiunea p . În fine lucrul mecanic necesar descărcării izobare a fluidului din corpul pompei în sistem este:

$$L_4 = pV \quad (8.8)$$

În final fluidul este accelerat la viteza v având energia cinetică $\frac{v^2}{2}$.

Potențialul fluidului în punctul P are deci expresia:

$$\varphi = -p_0 V_0 + \int_v^{v_0} p dV + pV + \frac{v^2}{2} + gz \quad (8.9)$$

Potențialul într-un punct poate fi exprimat numai în funcție de presiune și densitate, parametrii macroscopici mult mai ușor de măsurat. Avem:

$$d(pV) = p dV + V dp$$

și:

$$\int_{pV}^{p_0 v_0} d(pV) = \int_v^{v_0} p dV + \int_p^p V dp \quad (8.10)$$

sau, integrând termenul din stânga:

$$\int_v^{v_0} p dV = p_0 V_0 - pV + \int_{p_0}^p V dp \quad (8.11)$$

Introducând aceste formule în relația (8.9) obținem pentru potențialul unui fluid compresibil:

$$\varphi = gz + \int_{p_0}^p V dp + \frac{v^2}{2} \quad (8.12)$$

În cazul în care densitatea fluidului este funcție numai de presiune și reamintind că potențialul este definit ca energia mecanică raportată la unitatea de masă, atunci $V = \frac{1}{\rho}$ și obținem expresia finală a potențialului hidraulic într-un punct:

$$\varphi = gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad (8.13)$$

În cazul fluidului incompresibil, densitatea este constantă și expresia potențialului devine:

$$\varphi = gz + \frac{p - p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad (8.14)$$

Comparând cu ecuația (6.) constatăm că în cazul unui fluid ideal potențialul într-un punct nu este altceva decât sarcina hidraulică în punctul respectiv.

Revenind la experimentul Darcy, proba de nisip poate fi considerată un tub de curent. Dacă s-ar neglija frecările atunci conform legii lui Bernoulli curgerea s-ar face astfel încât sarcina hidraulică să fie constantă. Însă după cum am arătat, mișcarea fluidelor prin medii poroase fiind un proces esențial disipativ, potențialul scade în lungul unui tub de curent. Mai mult procesele de curgere sunt foarte lente având viteze de ordinul cm/sec astfel încât termenul cinetic poate fi neglijat.

În aceste condiții potențialul (sarcina hidraulică) are expresia:

$$\varphi = gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \quad (8.15)$$

În cazul lichidelor incompresibile expresia (8.15) a potențialului devine:

$$\varphi = gz + \frac{p - p_0}{\rho} \quad (8.16)$$

sau alegând presiunea atmosferică drept presiune de referință ($p_0 = 0$):

$$\varphi = gz + \frac{p}{\rho} \quad (8.17)$$

Dacă definim potențialul ca energie specifică unității de greutate, atunci relația precedentă devine:

$$\varphi = z + \frac{p}{\rho g} \quad (8.18)$$

În condițiile amintite potențialul hidraulic într-un punct al acviferului este direct măsurabil cu ajutorul unui tub piezometric (Figura 8.2): în cazul în care z este cota punctului respectiv față de un referențial oarecare, atunci presiunea în punctul respectiv este echilibrată la înălțimea h a coloanei de fluid iar potențialul hidraulic este egal cu nivelul H al apei în tubul piezometric măsurat însă de la referențialul ales. Din această cauză în practica hidrogeologică potențialul hidraulic este denumit *nivel piezometric*.

Analiza efectuată pune în evidență semnificația fizică a înălțimii h introdusă în mod empiric în experimentul Darcy; ea reprezintă potențialul hidraulic în punctul respectiv. Diferența de potențial dintre două puncte situate la distanța l este o mărime a energiei disipate de fluid în timpul curgerii. Deci diferența de potențial $\Delta\varphi$ între două puncte situate la distanța l reprezintă lucrul mecanic efectuat de forțele care pun în mișcare unitatea de greutate de fluid, atunci raportul $\Delta\varphi/\Delta l$ reprezintă tocmai forțele generalizate care pun în mișcare fluidul.

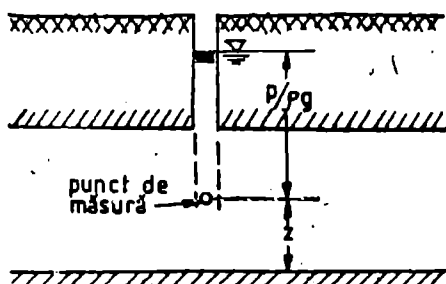


Figura 8.2: Nivel piezometric măsurat într-un punct al unui acvifer sub presiune

De remarcat faptul că efectul forțelor generalizate îl reprezintă viteza de mișcare și nu accelerația acesteia. Aceasta este datorată caracterului puternic disipativ al procesului de curgere care conduce la neglijarea accelerațiilor.

8.3. Conductivitatea hidraulică

Introdus, ca și înălțimea piezometrică, h , în mod empiric de către legea Darcy, conductivitatea hidraulică K este un parametru ce caracterizează la scară macroscopică proprietățile conductoare ale sistemului fluid - matrice solidă.

Faptul că procesul de curgere prin medii poroase este disipativ trebuie reflectat și în structura conductivității hidraulice, care trebuie să fie funcție de proprietățile conductoare ale fluidului și ale matricei solide.

Astfel în cazul fluidului, conductivitatea trebuie să fie proporțională cu densitatea și invers proporțională cu vâscozitatea acestuia, iar în cazul matricei solide conductivitatea trebuie să fie funcție de diametrul porilor interconectați.

Aceste observații au fost confirmate de experimente realizate pe medii poroase artificiale alcătuite, din sfere de diametru constant. Se realizează astfel o structură ideală în care toți porii au aceeași geometrie dictată de aranjamentul în spațiu al sferelor.

Realizând structuri cu bile de diferite diametre d , străbătute de fluide cu densitate și vâscozitate dinamică diferită, experiența arată că debitul specific este o funcție de acești parametri:

$$\begin{aligned} v &\sim d^2 \\ v &\sim \rho \\ v &\sim \frac{1}{\mu} \end{aligned} \tag{8.19}$$

Legea Darcy poate fi atunci pusă sub forma:

$$v = -C \frac{\rho g}{\mu} d^2 \cdot \frac{\Delta h}{l} \tag{8.20}$$

Constanta C , din relația precedentă, caracterizează forma aranjamentului sferelor iar g , accelerația gravitației, a fost introdusă din considerente de omogenitate dimensională.

În forma dată de ecuația (8.20) curgerea prin medii poroase ideale este formal asemănătoare cu mișcarea fluidelor prin conducte conform relației 5. Viteza medie într-o secțiune a unui fluid ce curge printr-o conductă de rază R este:

$$v = -\frac{\rho g}{8\mu} R^2 \frac{\Delta p}{\Delta l} \quad (8.21)$$

sau în cazul în care conducta este curbă :

$$v = -\tau \frac{\rho g}{8\mu} R^2 \frac{\Delta p}{\Delta l} \quad (8.22)$$

unde τ este un număr adimensional ce caracterizează tortuozitatea conductei.

Curgerea prin conducte depinde deci de natura fluidului caracterizată prin parametrii ρ și μ și prin proprietățile conductoare ale conductei caracterizate prin *conductanța* $R^2 / 8$ și respectiv prin tortuozitatea τ a acesteia.

Atât rezultatele experimentului cât și analogie cu mișcarea fluidelor vâscoase prin conducte pot fi generalizate în cazul materialelor poroase reale (roci sau pământuri) pornind de la observația că parametrul de material, conductivitatea hidraulică, este un parametru global ce caracterizează proprietățile medii conductoare ale sistemului fluid - matrice solidă.

Dacă influența fluidului este caracterizată prin produsul $\frac{\rho g}{\mu}$ influența matricii solide ar trebui să fie caracterizată prin conductanța respectiv tortuozitatea medie a porilor. Or acești parametri nu pot fi măsurați direct. Din această cauză pentru a caracteriza efectul matricii solide s-a introdus în mod empiric un nou parametru macroscopic k_0 , denumit *permeabilitatea intrinsecă* și care înglobează toate caracteristicile conductoare ale matricii solide Conductivitatea hidraulică a rocilor are atunci expresia:

$$K = k_0 \frac{\rho g}{\mu} \quad (8.23)$$

Prin introducerea permeabilității se înlocuiește materialul poros real cu material fictiv având conductanța respectiv tortuozitatea constantă care însă pentru un gradient dat conduce la același flux ca și materialul real. Reamintind că unitatea de măsură a vâscozității [*Pa.sec*] are dimensiunile MTL^{-1} rezultă din relația (8.23) că dimensiunile permeabilității sunt:

$$k_0 = \frac{[K][\mu]}{[\rho][g]} = \frac{L \cdot T^{-1} \cdot MLT^{-1}}{M \cdot L^{-3} \cdot LT^{-2}} = L^2$$

sau în S.I.

$$[k_0] = m^2$$

Datorită heterogenității rocilor conductivitatea hidraulică prezintă variații importante chiar în cadrul aceluiași tip litologic. Tabelul 8.1 prezintă ordinul de mărime al conductivității pentru diferite tipuri de roci.

Tabelul 8.1

VALORI CARACTERISTICE ALE CONDUCTIVITĂȚII HIDRAULICE

ROCI	CONDUCTIVITĂȚI HIDRAULICE (m/sec)
Roci neconsolidare	
- pietriș	$3 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-2}$
- nisip grosier	$9 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-3}$
- nisip mediu	$9 \cdot 10^{-7} - 5 \cdot 10^{-4}$
- nisip fin	$2 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-4}$
- loess	$2 \cdot 10^{-9} - 1 \cdot 10^{-5}$
- argile	$1 \cdot 10^{-11} - 5 \cdot 10^{-9}$
Roci sedimentare	
- calcare carstice	$1 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-2}$
- calcare, dolomite	$1 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-6}$
- gresii	$3 \cdot 10^{-10} - 6 \cdot 10^{-6}$

- sare	$1 \cdot 10^{-12} - 1 \cdot 10^{-10}$
- anhidrit	$4 \cdot 10^{-13} - 2 \cdot 10^{-8}$
- șist argilos	$1 \cdot 10^{-13} - 2 \cdot 10^{-9}$
Roci vulcanice și metamorfice	
- bazalte permeabile	$4 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-2}$
- granit alterat	$3 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-5}$
- gabro alterat	$5 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-6}$
- bazalt	$2 \cdot 10^{-11} - 4 \cdot 10^{-7}$
- roci vulcanice și metamorfice fracturate	$8 \cdot 10^{-9} - 3 \cdot 10^{-4}$
- roci vulcanice și metamorfice nefracturate	$3 \cdot 10^{-14} - 2 \cdot 10^{-10}$

În practică, în special în ingineria rezervoarelor de petrol, este utilizat un submultiplu, *1 darcy*, definit ca permeabilitatea unui cub cu latura de *1 cm* străbătut de apă având vâscozitatea de *un centipoise* și care, supus unei diferențe de presiune de *1 atmosferă* conduce la un debit specific de *1 cm / sec*. După cum se observă în definiție unității darcy intervine gradientul presiunii și nu cel al nivelului piezometric. Din această cauză, pentru a stabili legătura dintre *1 darcy* și unitatea din SI vom considera ca proba din experimentul Darcy este orizontală. În acest caz efectul elevației *z* dispare și legea Darcy capătă forma:

$$q = - \frac{k_0}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l} \quad (8.24)$$

Reamintim că $1 \text{ cpoise} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{sec}$ avem atunci:

$$k_0 = \frac{\mu q \Delta l}{\Delta p} = \frac{10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{sec} \cdot 1 \text{ cm} / \text{sec} \cdot 1 \text{ cm}}{10^5 \text{ Pa}} = 10^{-8} \text{ cm}^2$$

8.4. Valabilitatea legii lui Darcy

În interpretarea rezultatului experimental al lui Darcy am considerat un câmp uniform de viteză. Ipoteză valabilă doar în cazul unui regim laminar de curgere. Consecința imediată a acestui fapt este relația lineară dintre forțele generalizate (gradientul hidraulic) și efectul lor - viteză de curgere.

Experiența a validat legea Darcy pentru marea majoritate a problemelor întâlnite în practica inginerească unde, așa cum am arătat vitezele sunt relativ scăzute și curgerea se face în regim laminar.

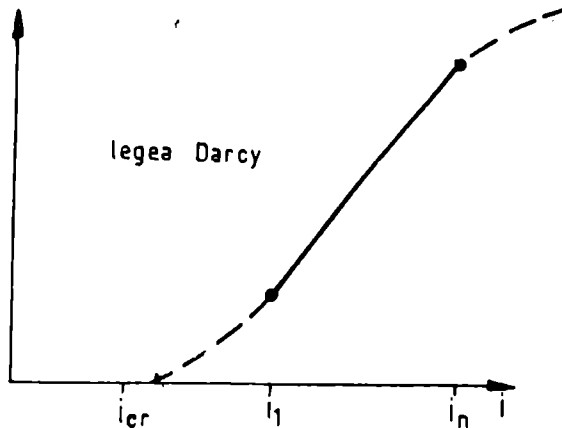


Figura 8.3: Variația vitezei cu gradientul hidraulic

Există situații însă în care linearitatea dintre gradient și viteză nu mai este respectată și dacă acest fapt era previzibil pentru valori ridicate ale gradientului când regimul de curgere devine turbulent, experiența arată că există o limită inferioară a gradientului dincolo de care relația gradient - viteză este deasemeni nelineară.

Figura 8.3 prezintă relația dintre gradient și viteză pentru un domeniu foarte larg de valori.

Deosebim trei valori importante ale gradientului:

- i_{cr} : gradientul critic. Pentru $i < i_{cr}$ curgerea nu are loc și deci conductivitatea este nulă

Acest fenomen a fost pus în evidență în cazul rocilor argiloase și depinde de compoziția mineralogică a acestora și de conținutul în săruri a apei.

- i_l : este gradientul limită inferioară. În intervalul $i_{cr} - i_l$ curgerea este descrisă de o relație nelineară între gradient și viteză. Dincolo de această valoare legea lui Darcy își păstrează valabilitatea.

- i_n : limita superioară a gradientului, care o dată depășită conduce la un regim de curgere turbulent, caracterizat prin relații nelineare dintre gradient și viteze.

Trebuie subliniat că în marea lor majoritate, procesele de curgere în medii poroase au loc în limita valabilității legii lui Darcy, de proporționalitate între gradientul hidraulic și viteză.

În cazul curgerii prin conducte trecerea între cele două regimuri de curgere - laminară și turbulentă - este caracterizată empiric printr-un parametru adimensional - numărul Reynolds - ce exprimă raportul dintre forțele inerțiale și cele vâscoase care acționează asupra fluidului, având formula:

$$R_e = q \frac{d\rho}{\mu} \quad (8.25)$$

unde q este viteza medie a fluidului printr-o conductă de diametru d . Pentru conducte limita de trecere la regim turbulent este de $R_e = 2000$.

Dacă vom echivala mediul poros cu o structură de conducte atunci termenul d din expresia numărului lui Reynolds va reprezenta o lungime caracteristică a mediului poros. Încercările de laborator efectuate în vederea determinării numărului Reynolds au considerat diferite expresii pentru lungimea caracteristică:

- diametrul mediu al porilor
- diametrul eficace d_{10} al porilor
- \sqrt{k} unde k este permeabilitatea intrinsecă a porilor

Experiența arată însă că, indiferent de lungimea caracteristică valoarea critică a numărului lui Reynolds în cazul mediilor poroase este cuprins între 1 - 10, mult mai redusă decât în cazul conductelor.

Odată depășită această valoare, forțele inerțiale capătă pondere crescută, regimul de curgere rămânând însă laminar. Procesul de curgere nu mai este însă predominant vâscos și atunci termenul în accelerație capătă pondere tot mai mare. În cazul în care gradientul crește și $R_e < 150$ curgerea devine turbulentă iar relația dintre gradient și debit specific devine nelineară. Această relație a fost determinată empiric având forma generală:

$$i = aq + bq^2 \quad (8.26)$$

unde a și b sunt constante ce urmează a fi determinate experimental. Forma cea mai cunoscută este relația Kozeney - Carman cu:

$$a = 150 \frac{(1-n)\mu}{\rho g n^3 d^2}$$

$$b = 175 \frac{1-n}{4 g n^3 d}$$

unde prin d s-a notat diametrul mediu al porilor, iar prin n porozitatea.

8.5. Mediul continuu. Generalizarea legii Darcy

După cum am arătat în experiența Darcy, date fiind dimensiunile reduse ale porilor, mișcarea apei poate fi considerată uniformă: suprafețele echipotențiale sunt atunci plane paralele cu fețele probei iar liniile de curent sunt drepte perpendiculare pe acestea. Debitul specific este orientat în lungul liniei de curent iar gradientul sarcinii este o mărime vectorială egală cu viteza de variație a sarcinii piezometrice în lungul liniei de curent. (Figura 8.4)

Prin introducerea modelului conceptual al mediului continuu toate mărimile care intervin în caracterizarea mișcării (sarcina piezometrică, viteze, conductivități, etc) sunt funcții continue de punct. La scara acviferului putem vorbi atunci de câmpul sarcinii piezometrice, al vitezelor sau al conductivității în abordarea euleriană prezentată în capitolul 3.

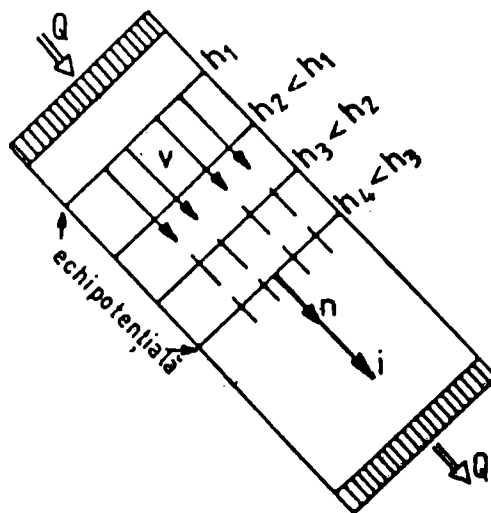


Figura 8.4: Variația sarcinii piezometrice în lungul unei probe.

Suprafețele în care sarcina piezometrică este constantă se numesc suprafețe echipotențiale și au ecuația:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0 = ct \quad (8.27)$$

Gradientul sarcinii piezometrice este atunci un vector orientat în lungul normalei la suprafața echipotențială având mărimea (*Figura 8.4*):

$$\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \bar{n} \quad (8.28)$$

unde \bar{n} este vectorul normalei exterioare la suprafața echipotențiale. Față de un referențial oarecare expresia gradientului este:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \bar{k} \quad (8.29)$$

sau, mai general:

$$\text{grad}\varphi = \varphi_{,i} \cdot \bar{i} \quad (8.30)$$

unde repetarea indicelui indică însumarea iar virgula derivarea după direcția respectivă.

În cazul unui mediu omogen și izotrop, câmpul conductivităților este scalar. Atunci legea Darcy poate fi generalizată în sensul că în fiecare punct este valabilă relația:

$$\bar{q} = -K(x, y, z) \text{grad}\bar{\varphi} \quad (8.31)$$

sau:

$$q_i = -K\varphi_{,i} \bar{i} \quad (8.32)$$

unde q , sunt componentele fluxului pe cele trei direcții. În cazul unui mediu anizotrop, conductivitatea este funcție de direcție. Să considerăm atunci un volum de control infinitezimal (figura 8.5) și fie \bar{q}_x vectorul flux corespunzător feței cu normalele paralele cu axa x , având componentele q_{xx} , q_{xy} , q_{xz} .

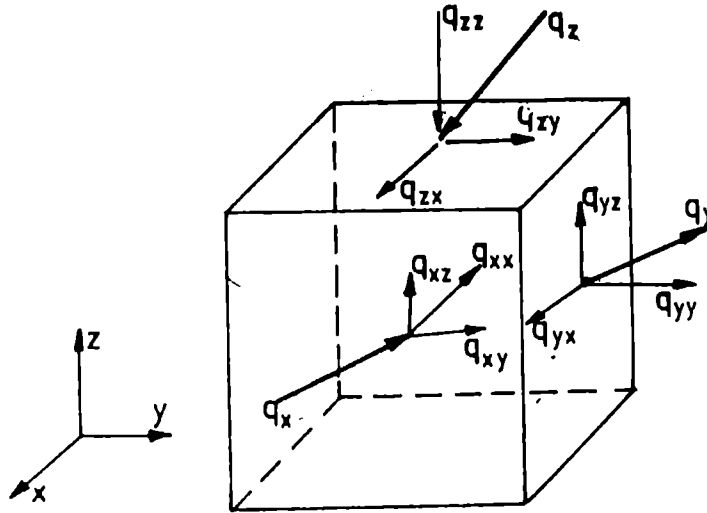


Figura 8.5: Distribuția fluxurilor pe suprafețele unui element infinitezimal.

Legea lui Darcy poate fi atunci generalizată pentru fiecare direcție:

$$q_{xx} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$q_{yy} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (8.33)$$

$$q_{zz} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

sau:

$$\bar{q}_x = K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} - K_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} - K_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k}$$

Sensul fizic al componentelor K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} rezultă din relația precedentă. Spre exemplu K_{yy} este fluxul ce străbate o suprafață unitară orientată perpendicular pe axa x când mișcarea este datorată unui gradient unitar orientat pe direcția y .

Analog avem și pentru direcțiile y și z :

$$\begin{aligned} \bar{q}_y &= -K_{yx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} - K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} - K_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} \\ q_z &= -K_{zx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} - K_{zy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} - K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Din definiția componentelor conductivității rezultă că avem:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= K_{yx} \\ K_{yz} &= K_{zy} \\ K_{zx} &= K_{xz} \end{aligned} \quad (8.35)$$

Rezultă deci că pentru un mediu anizotrop conductivitatea este descrisă de un tensor simetric de ordinul 2.

Legea Darcy poate fi deci generalizată și pentru un mediu anizotrop, având formula:

$$q_i = K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (8.36)$$

sau:

$$\bar{q} = \bar{\bar{K}} \text{grad} \varphi \quad (8.37)$$

unde tensorul conductivității este notat cu K_{ij} sau $\bar{\bar{K}}$

Evident în cazul când fețele cubului sunt orientate perpendicular pe axele de coordonate, componentele în lungimea celorlalte axe sunt nule iar tensorul conductivității se reduce doar la componentele sale principale.

8.6 Distribuția spațială a conductivității. Heterogenitate și anizotropie.

Conductivitatea este parametrul esențial în caracterizarea hidrolică a unui sistem acvifer și distribuția lui determină în final caracteristicile curgerii apelor subterane. Modelul conceptual al mediului continuu face ca permeabilitatea și implicit conductivitatea să fie funcții de punct.

Un acvifer sau o zonă dintr-un acvifer este denumit *omogen* în cazul în care conductivitatea sa este constantă în orice punct al domeniului respectiv. În cazul în care valorile conductivității variază în spațiu acviferul, sau o zonă a acestuia este numit *heterogen*.

Dacă valorile conductivității sunt independente de direcție mediul este definit ca *izotrop* iar în cazul în care valorile respective depind de direcție, mediul este *anizotrop*.

La scara regională distingem două tipuri de heterogenități: *heterogenități graduale* și *heterogenități zonale*. În cazul heterogenităților graduale au loc variații continue ale parametrilor astfel încât conductivitatea este o funcție continuă de punct.

Heterogenitățile zonale sunt caracterizate prin subdomenii în care conductivitatea este constantă sau prezintă o variație graduală. Aceste zone sunt delimitate de interfețe care separă domenii cu caracteristici diferite. Dacă în cadrul fiecărei zone conductivitatea este funcție continuă de punct, la scara sistemului acvifer ea prezintă discontinuități pe interfețele ce separă zonele respective.

Astfel în cadrul heterogenităților graduale, datorită condițiilor speciale de sedimentare măsurătorile pun în evidență o anumită regularitate în distribuția conductivității.

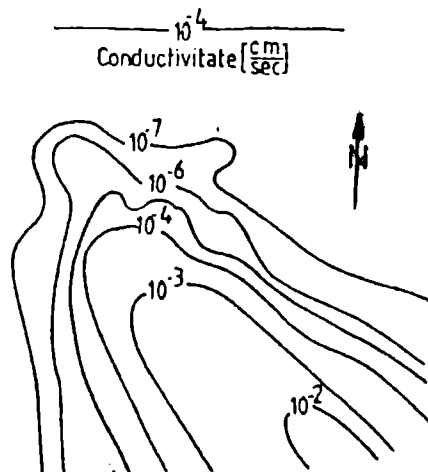


Figura 8.6: Heterogenitate graduală

Acest tip de heterogenitate graduală, denumită *heterogenitate cu tendință* este caracterizată printr-un anumit gradient (tendință) în distribuția spațială a proprietăților.

Figura 8.6 prezintă distribuția conductivității în gresiile ce alcătuiesc stratul purtător al unui acvifer situat în nordul provinciei Alberta – Canada. La scară regională se observă o tendință de descreștere a conductivității orientate SE – NW. Cauza acestei regularități o constituie condițiile de sedimentare: nisipul prin diagenеза căruia s-au format gresiile au fost depuse de curenții marini care circulau paralel cu țărmul. Conductivitățile mari, de 10,2 cm/sec măsurate în partea de SE sunt datorate nisipurilor mai groasere depuse în această zonă. Cum direcția de curgere era spre NW, micșorarea vitezei curentului a condus la depunerea progresivă a materialelor cu fracțiuni tot mai fine rezultând în final distribuția din figura 8.6

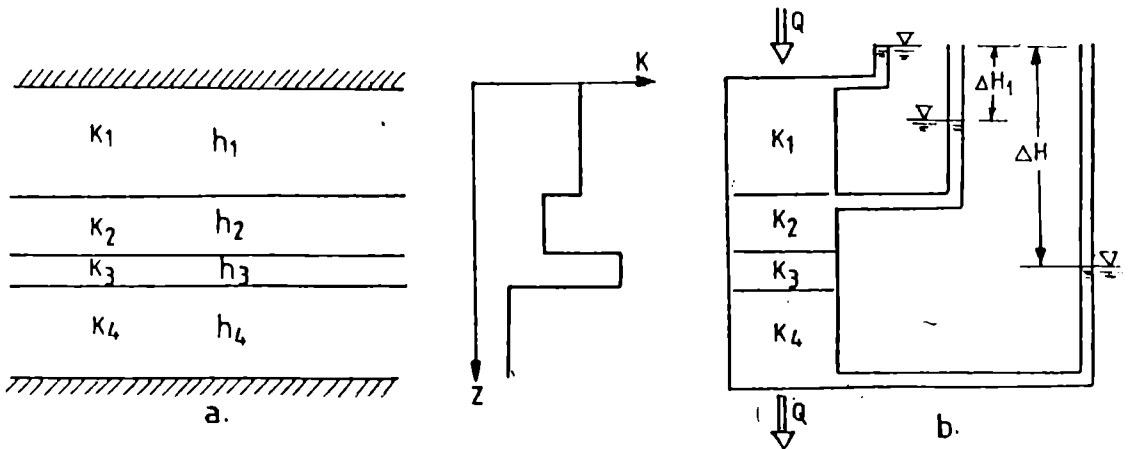


Figura 8.7: Conductivitatea echivalentă a unui mediu stratificat supus unui gradient vertical

Heterogenitățile zonale pot fi de multe ori mediate conducând la un acvifer omogen și izotrop. Exemplul tipic îl constituie acviferele stratificate alcătuite din strate omogene și izotrope fiecare având conductivitățile K_i , respectiv grosimile h_i (Figura 8.7 a). Dacă din această structură separăm un domeniu având aria unitară, care va fi pacurs de un debit constant Q atunci continuitatea debitelor conduce la (Figura 8.7. b) :

$$Q = K_v \cdot \frac{\Delta H}{\sum h_i} = K_1 \frac{\Delta H_1}{h_1} = \dots = K_i \frac{\Delta H_i}{h_i} = \dots = K_n \frac{\Delta H_n}{h_n} \quad (8.38)$$

Rezultă deci pentru variația nivelului piezometric:

$$\Delta H_i = \frac{Q h_i}{K_i} \quad (8.39)$$

și:

$$\Delta H = \frac{Q \sum h_i}{K_v^*} \quad (8.40)$$

Cum $\Delta H = \sum_{i=1}^n \Delta H_i$, obținem pentru conductivitatea verticală echivalentă:

$$K_v^* = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\sum \frac{h_i}{K_i}} \quad (8.41)$$

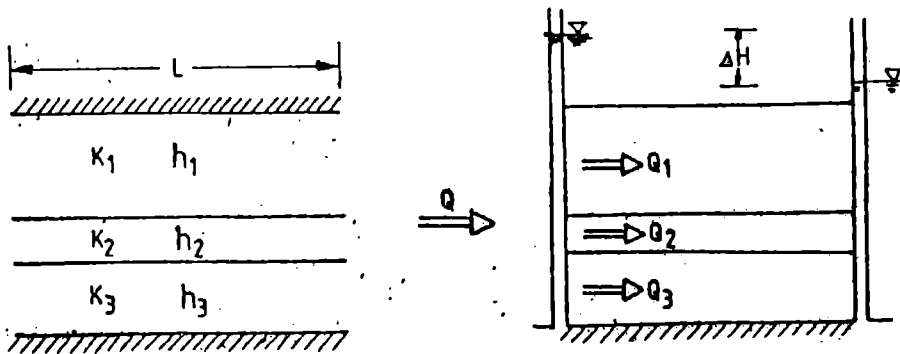


Figura 8.8: Conductivitatea echivalentă a unui mediu stratificat supus unui gradient orizontal

În mod analog vom considera o lungime de analiză L și vom parcurge sistemul stratificat pe orizontală cu un debit Q (Figura 8.8a și b). Dacă vom analiza un domeniu de lățime unitară și de lungime L , atunci debitul Q_i ce străbate fiecare strat are expresia:

$$Q_i = K_i k_i \frac{\Delta H}{L} \quad (8.42)$$

unde am notat cu ΔH diferența de sarcină de la capetele stratelor. În același timp, debitul total ce străbate întregul sistem este:

$$Q = K_0 \sum h_i \frac{\Delta H}{L} \quad (8.43)$$

Dar debitul total Q este suma debitelor ce străbat fiecare strat. Avem atunci:

$$Q = \sum Q_i \quad (8.44)$$

și înlocuind cu relațiile (8.42) și (8.43) obținem atunci pentru conductivitatea echivalentă orizontală, relația:

$$K_0 \sum_{i=1}^m h_i \frac{\Delta H}{L} = \sum_{i=1}^n K_i h_i \frac{\Delta H}{L} \quad (8.45)$$

și respectiv, după simplificare:

$$K_0 = \frac{\sum K_i h_i}{\sum h_i} \quad (8.46)$$

Dacă sistemul de referință are axele orientate în lungul, respectiv perpendicular pe planele de stratificație atunci am echivalat mediul stratificat având o heterogenitate zonală cu un mediu omogen dar anizotrop în care valorile principale de conductivitate au expresiile date de (8.42) și (8.46).

8.7 Medii fracturate

Analiza curgerii în medii fracturate poate fi făcută fie considerând , în mod separat fiecare fisură , fie luând în considerație întreg ansamblul fisurilor . În cea de a doua abordare mediul fracturat este echivalent cu un mediu continu . Modelul utilizat (fisuri individuale sau mediu continu) depinde de scara la care se face analiza și de problema considerată . Spre exemplu în cazul studierii unui acvifer regional fracturat , datorită extinderii mari a domeniului , întâlnim întotdeauna unul sau mai multe sisteme de fracturi cu un grad mare de conectivitate . În acest caz este posibilă existența unui volum elementar reprezentativ suficient de mic comparativ cu scara la care se face analiza atfel încât echivalarea mediului fisurat cu un mediu continu să fie posibilă .

Din contra , în cazul unor probleme de mică extindere cum ar fi problemele de stabilitate sau de pierderi locale , una sau mai multe fracturi devin direcții preferențiale de curgere și analiza trebuie făcută considerând fisurile individuale .

În ambele abordări se pune problema stabilirii legii de mișcare .

a . Mișcarea apei în fracturi

În capitolul 5.5 a fost analizată mișcarea apei într-un mediu fisurat considerând fețele fisurilor plane iar curgerea laminară . Dacă ipotezele amintite sunt respectate , legea Darcy este valabilă și prin comparație cu (8.23) putem vorbi de permeabilitatea echivalentă a fisurii având expresia :

$$k_f = e^2/12 \quad (8.47)$$

unde e este deschiderea fisurii .

În realitate pereții fracturilor sunt doar local plane paralele ; din contră pereții fracturilor prezintă asperități care conduc la variații importante ale deschiderii . Dacă local grosimea fisurii

depășește o anumită valoare există posibilitatea schimbării regimului de curgere din laminar în turbulent . În aceste condiții fracturile pot fi echivalate cu o conductă rugoasă pentru care tipul de regim de curgere - laminar sau turbulent este definit nu numai de viteză și geometria medie caracterizat global prin numărul Reynolds , dar și prin rugozitatea acestora .

Spre deosebire , deci de cazul mediului poros , în cazul fracturilor numărul Reynolds are valori apropiate de cele din cazul curgerii prin conducte de diametru d .

Valoarea critică pentru care are loc trecerea la regimul turbulent este cea obținută în cazul unei conducte

$$R_{e\text{ cr.}} = 2000 .$$

Cum în cazul fisurii deschiderea variază vom defini un diametru hidraulic echivalent D_h a cărei expresie este :

$$D_h = 4 \frac{S}{P} \quad (8.48)$$

unde am notat prin S secțiunea fisurii prin care are loc curgerea și prin P perimetrul exterior al acestei secțiuni .

Rugozitatea echivalentă a fisurii , R_f este definită de :

$$R_f = \frac{h}{D_h} \quad (8.49)$$

unde am notat cu h înălțimea medie a asperității .

Studiile experimentale efectuate în 1975 de Fr. Louis au pus în evidență forma legii de curgere :

$$v = - \frac{\rho g e^2}{12 \mu [1 + R_f^n]} J^m \quad (8.50)$$

În relația precedentă J este gradientul hidraulic prin fisuri unde m și n sunt doi parametri empirici .

În cazul în care regimul de curgere este laminar ($m=1$) iar viteza este proporțională cu gradientul hidraulic .

Dacă asperitățile sunt neglijabile $R_f = 0$ și permeabilitatea fisurii este funcție numai de pătratul deschiderii . De remarcat posibilitatea separării celor doi factori . Astfel efectul rugozității poate apare și în cazul curgerii laminare și invers chiar în cazul curgerii turbulente permeabilitatea fisurii poate fi funcție numai de pătratul deschiderii .

În funcție de cei doi parametri adimensionali - rugozitatea echivalentă și numărul lui Reynolds au fost stabilite cinci forme ale legii de mișcare :

- *Tipul 1* : laminar neted : este caracteristic fisurilor cu asperități reduse ($R_f < 0,033$) și $R_e < 2300$ Fisurile pot fi approximate cu două planuri paralele situate la distanța e iar legea de mișcare este dată de ecuația (8.50.) vitezele sunt proporționale cu gradientul sarcinii hidraulice iar permeabilitatea echivalentă depinde numai de pătratul deschiderii .

- *Tipul 2* : turbulent neted este caracteristic fisurilor cu asperități reduse ($R_f < 0,033$) dar pentru $R_e < 2300$. Legea de mișcare are expresia :

$$v = \left[\frac{g}{0,079} \left(\frac{2\rho g e^3}{\mu} \right)^{\frac{1}{4}} J \right]^{\frac{4}{7}} \quad (8.51)$$

Regimul de curgere este turbulent viteza nu mai este proporțională cu gradientul hidraulic dar permeabilitatea echivalentă a fisurii depinde , ca și pentru tipul 1 , numai de deschiderea medie a fisurii

- *Tipul 3* : ($R_f < 0,033$, $R_e > 10^5$) turbulent rugos pentru care legea de mișcare are forma

$$v = \left[4\sqrt{ge} \ln \frac{3,7}{R_f} \right]^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} \quad (8.52)$$

După cum se observă permeabilitatea echivalentă depinde nu numai de deschiderea medie dar și de rugozitatea fisurii .

- *Tipul 4* , laminar rugos caracterizat de $R_f > 0,033$ și $R_e < 2300$. Expresia legii de mișcare este

$$v = -\frac{\rho g e^2}{12\mu(1 + 8,8R_f^{1,5})} J \quad (8.53)$$

În condițiile date curgerea este laminară viteza este proporțională cu gradientul dar permeabilitatea echivalentă depinde de rugozitatea fisurii .

- *Tipul 5* - turbulent foarte rugos caracteristic pentru $R_f > 0,033$ și $R_e > 2300$ are legea de mișcare de forma :

$$v = -\left(4\sqrt{eg} \ln \frac{1,9}{R_f}\right) \sqrt{J} \quad (8.54)$$

b. Mediul continuu .

În cazul analizei la scară regională în condițiile existenței unui volum elementar reprezentativ mediul fracturat poate fi echivalent cu un mediu continuu .

În majoritatea cazurilor permeabilitatea mediului echivalent se determină direct , din încercări , aplicând rezultatele obținute în cazul mediului poros .

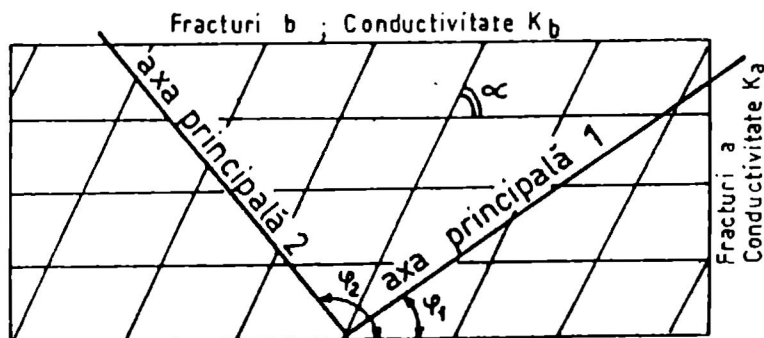


Figura 8.9. Echivalarea unui sistem de fracturi cu un mediu continuu anizotrop

Dacă fracturile au o distribuție regulată iar permeabilitatea fiecărei familii de fracturi este relativ constantă atunci parametrii globali , ai mediului echivalent pot fi exprimați în funcție de caracteristicile sistemului de fisuri .

Astfel în capitolul 5 , pentru un sistem alcătuit din fisuri plane situate la distanța b a fost dedusă expresia conductivității echivalente.

Un sistem alcătuit din două familii de fisuri având permeabilitățile constante K_a și K_b și care se intersectează sub un unghi α poate fi echivalent cu un mediu omogen și anizotrop (Figura 8.10) .

Direcțiile principale de curgere sunt :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{K_b}{K_a} \operatorname{tg} 2\alpha \right) \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{8.55}$$

iar valorile conductivității în lungul acestor direcții sunt :

$$K_1 = \frac{K_a K_b \sin^2 \alpha}{K_a \sin^2 \varphi_1 + K_b \sin(\alpha - \varphi_1)}\tag{8.56}$$

respectiv :

$$K_2 = \frac{K_a K_b \sin^2 \alpha}{K_a \sin^2 \varphi_2 + K_b \sin(\alpha - \varphi_2)}\tag{8.57}$$

8.8 Mediul cu dublă porozitate

În ~~majoritatea~~ majoritatea cazurilor , rocile fracturate sunt caracterizate prin două sisteme de goluri : fisurile propriuzise și matricea poroasă . Se crează local , la nivelul volumului reprezentativ neomogenități datorită conductivităților diferite ale acestor două sisteme de goluri .

Dacă analiza se face în regim permanent se poate considera un volum reprezentativ extins să înglobeze ambele discontinuități și să determinăm în urma unui experiment o conductivitate echivalentă.

În cazul regimului nepermanent transmiterea presiunii se face cu viteze diferite în fisuri și în matricea solidă.

Conductivitatea mare a fracturilor face ca variația presiunii în sistemul de fisuri să fie mult mai mare decât în matricea poroasă. În consecință la scara aceleiași volum elementar reprezentativ apare un gradient de presiune între fracturi și matricea solidă, având ca efect transferul fluidului între cele două elemente.

Legea Darcy trebuie atunci modificată prin intermediul unui termen suplimentar care să pună în evidență descărcarea sau realimentarea matricei poroase. Avem atunci:

$$V = -\frac{k_f}{\mu} \text{grad} p_f - \beta \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} p_f \quad (8.58)$$

unde prin β am notat *compresibilitatea elastică* a sistemului alcătuit din fluid și discontinuități iar prin p_f *presiunea în fracturi*.

Se observă că atunci când presiunea în fracturi este constantă în timp al doilea termen dispare și legea Darcy ia forma cunoscută din regimul permanent de curgere.

9. ECUATII DE MISCARE ALE APEI IN ACVIFERE.

Am definit un acvifer ca fiind o structură geologică caracterizată prin două elemente: permite circulația apei și este capabilă să stocheze un volum important de fluid. In același timp modelul conceptual al mediului continuu implică introducerea unor parametri macroscopici de material care să caracterizeze la scara măsurătorii mediul poros.

In capitolul precedent am caracterizat cantitativ prima proprietate prin introducerea unui parametru macroscopic de material, *conductivitatea hidraulică*. Vom aborda în acest capitol descrierea celei de a doua caracteristici a acviferului. Ne putem imagina ușor că în cazul unui acvifer cu nivel liber acumularea sau drenarea apei se face prin umplerea sau golirea porilor. Matricea solidă a rocilor poate fi considerată rigidă, volumul porilor fiind constant. Experiența arată că se pot acumula volume însemnate de fluid și în cazul acviferelor sub presiune. Fizic, stocarea apei in acest tip de acvifere este posibilă numai prin variația volumului porilor. Aceasta implică introducerea unui al doilea parametru macroscopic de material, *acumularea specifică*. Prin intermediul acestor doi parametri, conductivitatea hidraulică și acumularea specifică, ecuația de continuitate și legea Darcy conduc la descrierea mișcării apei subterane printr – o singură ecuație cu derivate parțiale.

9.1. Deformarea matricii solide. Eforturi totale si efective.

Experiența demonstrează că acțiunea sarcinilor exterioare are efecte diferite asupra matricii solide și a fluidului interstițial.

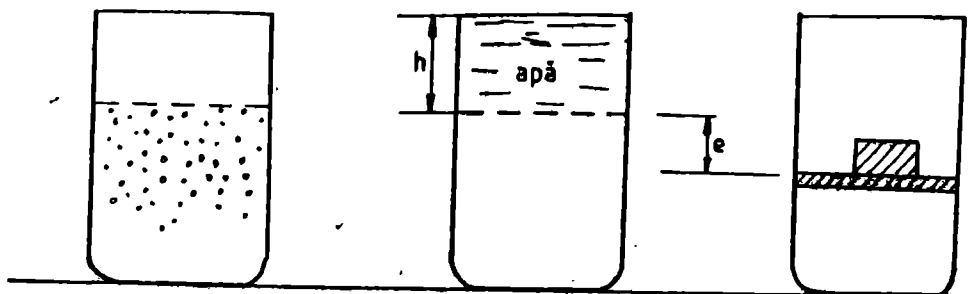


Figura 9.1: Model analog al mediului poros saturat

Să echivalăm mediul poros cu o structură de bile având interstițiile complet umplute cu apă. (Figura 9.1 a) Incărcările exterioare se pot transmite în două feluri:

1. numai prin fluid ;
2. numai prin solid ;

În primul caz încărcarea exterioară se realizează mărind înălțimea coloanei de lichid care acționează asupra sistemului (Figura 9.1 b). Acest mod de încărcare are drept unic efect creșterea presiunii apei în pori fără însă a deforma matricea solidă. Terzaghi denumește presiunea din fluid drept *presiune neutrală* în sensul că transmiterea încărcărilor prin fluid nu are efect direct asupra solidului.

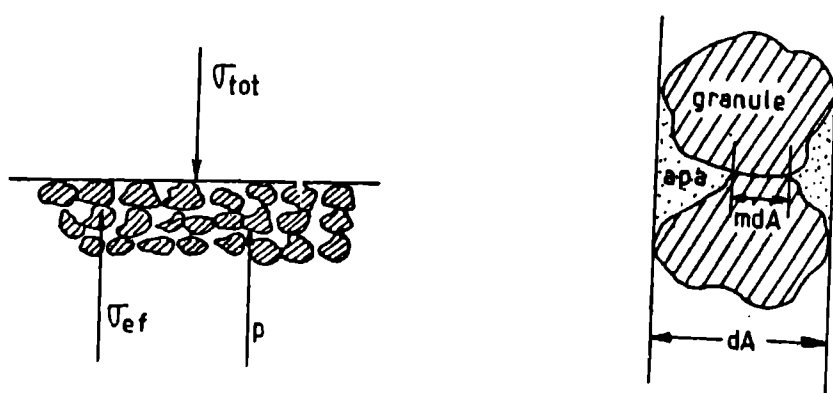


Figura 9.2: Eforturi totale, presiune neutrală și eforturi efective.

Aceiași încărcare poate fi realizată din granula în granula direct în solid. (Figura 9.1. c). Ca rezultat se constată o deformare (tasarea) a solidului. Incărcările transmise direct în solid sunt deci singurele care au efect asupra acestuia iar starea de eforturi generată în urma acestui tip de sollicitare a fost denumită *efort efectiv*.

Pentru a ilustra procesul de transformare a încărcărilor în complexul solid – fluid vom relua analogia lui Terzaghi conform căreia matricea solidă este echivalată cu un resort elastic iar fluidul cu apa inclusă într-un cilindru. Sub acțiunea încărcării σ lungimea totală a resortului este z (Figura 9.3. a). În condițiile inițiale, mediul poros saturat reprezentat de resortul inclus în cilindru se află în

echilibru: resortul preia sarcina σ iar presiunea în apă este doar presiunea hidrostatică $p = \rho g z$, așa cum indică manometrul montat la baza cilindrului (Figura 9.3.b). Dacă vom încărca sistemul cu o sarcină suplimentară $\Delta\sigma$ se constată că resortul nu se deformează; în schimb înălțimea coloanei de apă din manometru crește cu $\Delta z = \frac{\Delta\sigma}{\rho g}$.

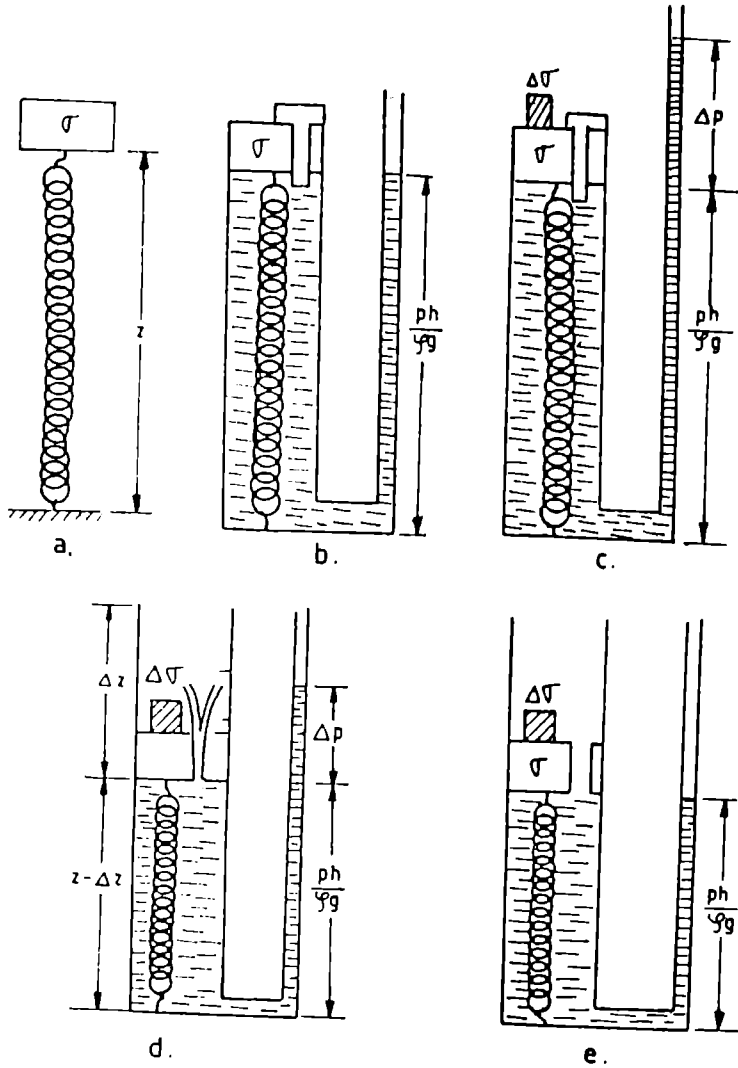


Figura 9.3: Analogia Terzaghi privind redistribuirea eforturilor totale între fluid și solid

Aceasta înseamnă că tot efortul suplimentar $\Delta\sigma$ este preluat de apă sub formă de exces de presiune față de presiunea hidrostatică (Figura 9.3.c). Dacă vom permite drenarea apei la partea superioară a cilindrului vom constata o deformare a resortului, simultan cu o micșorare a excesului de presiune a fluidului; efectul suplimentar $\Delta\sigma$ este preluat treptat de resort care se comprimă, eliminarea apei conducând deci la un transfer al încărcării din fluid în solid (figura 9.3.d).

Procesul continuă până când transferul de încărcare este complet: excesul de presiune din fluid se disipă și este integral preluat de resort. Acesta se deformează cu $\Delta z = \frac{\Delta \sigma}{k}$ (unde k este constanta elastică a resortului), iar apa revine la noua stare de echilibru caracterizată prin presiunea hidrostatică $p' = \rho g(z - \Delta z)$ (Figura 9.3.e).

Această analogie conduce la următoarele ipoteze asupra comportării sub încărcare ale mediului poros saturat:

- fluidul este incompresibil;
- granulele care alcătuiesc matricea solidă sunt incompresibile;
- compresibilitatea mediului poros este caracterizată doar prin modificarea porozității.

Continuând analogia de mai sus putem afirma că sub acțiunea unor sarcini constante variația eforturilor efective între două stări de echilibru este egală cu variația presiunii neutrale între aceleași stări de echilibru.

Generalizând acest rezultat și ținând seama de ipotezele făcute anterior asupra comportării mediului poros saturat putem formula astfel principiul lui Terzaghi:

Intr-un mediu poros saturat eforturile totale aplicate sistemului solid – fluid se transmit cu pondere egală celor două faze:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{ef} + p \quad (9.1)$$

unde am notat prin:

σ_{tot} : eforturile totale;

σ_{ef} : eforturile efective;

p : presiunea neutrală .

Trebuie menționat că în formularea (9.1) dată de Terzaghi se consideră că cele trei eforturi acționează pe aceeași suprafață. De fapt dacă eforturile totale sunt definite pe aria dA (Figura 9.1) atunci eforturile efective și presiunea neutrală acționează doar pe anumite porțiuni ale acesteia. Ținând seama însă de modelul conceptual al mediului continuu erorile introduse de aproximația precedentă sunt în marea majoritate a cazurilor neglijabile. Ca orice principiu, principiul Terzaghi nu poate fi demonstrat. El a fost verificat de experiență, în condițiile respectării ipotezelor în care a fost formulat.

Importanța sa apare în momentul în care studiem variațiile eforturilor. Fie deci $d\sigma_{tot}$, $d\sigma_{ef}$ și dp variațiile eforturilor totale ale eforturilor efective, respectiv ale presiunii neutrale. Derivând relația (9.1) obținem:

$$d\sigma_{tot} = d\sigma_{ef} + dp \quad (9.2)$$

Cu alte cuvinte variația eforturilor totale este egală cu suma variațiilor eforturilor efective și ale presiunii neutrale. Pentru exemplificare să considerăm un acvifer sub presiune în care eforturile totale sunt date de sarcina geologică și sunt prin urmare constante. Atunci relația (9.3) devine:

$$d\sigma_{ef} = -dp \quad (9.3)$$

Regăsim astfel concluzia la care am ajuns anterior, pe baza studierii unui model analogic simplu: egalitatea dintre variațiile presiunii neutrale și ale eforturilor efective este o consecință a principiului lui Terzaghi în cazul particular al unei încărcări constante. Relația (9.3) are o deosebită importanță practică. Arătând că extragerea apei din acvifer va conduce în final la o tasare a acviferului. Într-adevăr: extragerea apei implică micșorarea presiunii neutrale și implicit, conform principiului Terzaghi la creșterea eforturilor efective. La rândul ei creșterea eforturilor efective generează tasările menționate. Dacă procesul se petrece la scară regională tasările pot fi de ordinul metrilor sau chiar a 10 -20 m, fenomen cunoscut sub numele de *subsidența terenurilor*. Cazuri spectaculoase cum sunt cele ale Veneției, Londrei sau Mexico City sunt binecunoscute. Înainte de a încheia acest paragraf vom face două observații importante:

- Procesul de transfer al încărcărilor dintre fluid și solid este esențial tranzitoriu: odată ce variația sarcinilor exterioare încetează excesul de presiune din pori se anulează și mediul poros saturat atinge o nouă stare de echilibru.

- Transferul sarcinilor între fluid și solid se face cu eliminarea (drenarea) fluidului; din punct de vedere geotehnic caracteristicile de material care vor interveni în descrierea fenomenului sunt cele obținute în condiții de drenanță ale probelor.

9.2. Ecuația de continuitate în acvifere sub presiune.

Dat fiind modelul conceptual al mediului continuu prezentat în paragraful 7.3 putem extinde ecuația de continuitate (4.16) la analiza mișcării apei în acvifere sub presiune, în forma :

$$\operatorname{div}(\rho \bar{q}) = \frac{\partial}{\partial t} (n\rho) \quad (9.4)$$

unde am notat prin:

q: debitul specific;

n: porozitatea totală;

După cum se observă forma (9.4) a ecuației de continuitate diferă de (4.16) prin faptul că derivata temporară afectează produsul $n\rho$ deoarece dacă volumul infinitesimal al mediului poros este dV fluidul ocupă doar volumul ndV .

Conform legii Darcy ecuația precedentă devine:

$$\operatorname{div}(\rho k \operatorname{grad} \varphi) + \frac{\partial}{\partial t} (n\rho) = 0 \quad (9.5)$$

Fizic, ecuația precedentă exprimă faptul că variațiile spațiale ale sarcinii piezometrice sunt dependente de variațiile în timp ale densității fluidului și porozității totale a mediului. Din punct de vedere matematic însă, ecuația (9.5) are trei necunoscute: ϕ , ρ și n . Este deci necesară o relație suplimentară care să exprime variațiile densității fluidului și a porozității mediului în funcție de sarcina hidrolică.

Dezvoltând termenul din dreapta obținem:

$$\frac{\partial}{\partial a}(n\rho) = \rho \frac{\partial n}{\partial a} + n \frac{\partial \rho}{\partial a} = \left(\rho \frac{\partial n}{\partial \varphi} + n \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial a} \quad (9.6)$$

Termenul $\partial\rho/\partial\varphi$ poate fi exprimat în funcție de coeficientul de compresibilitate al apei, β , conform relației (1.10):

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \rho \beta \quad (9.7)$$

Urmând același raționament, putem introduce un coeficient de compresibilitate al matricei solide care să exprime variația porozității în funcție de presiune.

Fie atunci V_t , V_w , și V_s volumul total al materialului poros, volumul ocupat de apă și respectiv volumul total al ganulelor de solid. Avem atunci:

$$V_s = (1 - n)V_t \quad (9.8)$$

Analog coeficientului de compresibilitate al apei vom defini un coeficient de compresibilitate al matricei solide care caracterizează proprietățile de deformabilitate ale acesteia sub acțiunea eforturilor efective:

$$\alpha = -\frac{1}{V_s} \cdot \frac{\partial V_s}{\partial \sigma_d} \quad (9.9)$$

Deoarece am presupus particulele solide ca fiind nedeformabile, avem:

$$\frac{\partial V_s}{\partial \sigma_d} = 0 \quad (9.10)$$

și ținând seama de (9.8):

$$V_t \frac{\partial n}{\partial \sigma_{ef}} + (1 - n) \frac{\partial V_t}{\partial \sigma_{ef}} = 0 \quad (9.11)$$

Impărțind prin V_t obținem:

$$-\frac{\partial n}{\partial \sigma_{ef}} - (1 - n) \frac{1}{V_t} \cdot \frac{\partial V_t}{\partial \sigma_{ef}} = 0 \quad (9.12)$$

și introducând (9.9) obținem atunci în final pentru coeficientul de compresibilitate al matricii

$$\alpha = -\frac{1}{1 - n} \cdot \frac{\partial n}{\partial \sigma_{ef}}$$

În conformitate cu principiul Terzaghi (9.3) derivatele în funcție de eforturile efective sunt egale și de semn contrar cu derivatele în funcție de presiune.

$$\frac{\partial n}{\partial p} = \alpha(1 - n) \quad (9.13)$$

Relațiile (9.7) și (9.13) exprimă deci variațiile densității fluidului și ale porozității în funcție de presiune prin intermediul a două caracteristici de material: compresibilitățile apei β , respectiv ale matricii solide α . De observat că pentru ambele relații a fost necesară analiza la nivel microscopic a transmiterii eforturilor prin mediul poros.

Derivând în funcție de timp expresia (8.14) a sarcinii piezometrice obținem în definitiv pentru membrul din dreapta al ecuației (9.4):

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = \rho^2 g [n\beta + (1 - n)\alpha] \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho S_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9.14)$$

unde am notat cu:

$$S_0 = \rho g [(1 - n)\alpha + n\beta] \quad (9.15)$$

Coefficientul S_0 definit de relația (9.15) și denumit *acumularea (înmagazinarea) specifică a acviferului* este un al doilea parametru macroscopic de material, după conductivitatea K , ce caracterizează răspunsul mediului la acțiunile exterioare și care este exprimat în funcție de proprietățile de deformabilitate ale matricii solide și ale fluidului.

Semnificația sa fizică rezultă imediat dacă reamintim că termenul $\partial(\rho m)/\partial t$ din ecuația de continuitate (9.4) reprezintă masa se fluid Δm acumulată în volumul unitar ΔV în unitatea de timp Δt . Avem atunci, ținând seama și de relația (9.14);

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} \approx \frac{\Delta m}{\Delta V \cdot \Delta t} = S_0 \rho \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \quad (9.16)$$

Conform relației precedente *acumularea specifică reprezintă volumul acumulat (sau drenat) în unitatea de volum a acviferului pentru o variație unitară a sarcinii piezometrice*. Din omogenitatea dimensională a relației rezultă că dimensiunile acumulării specifice sunt $[L^{-1}]$.

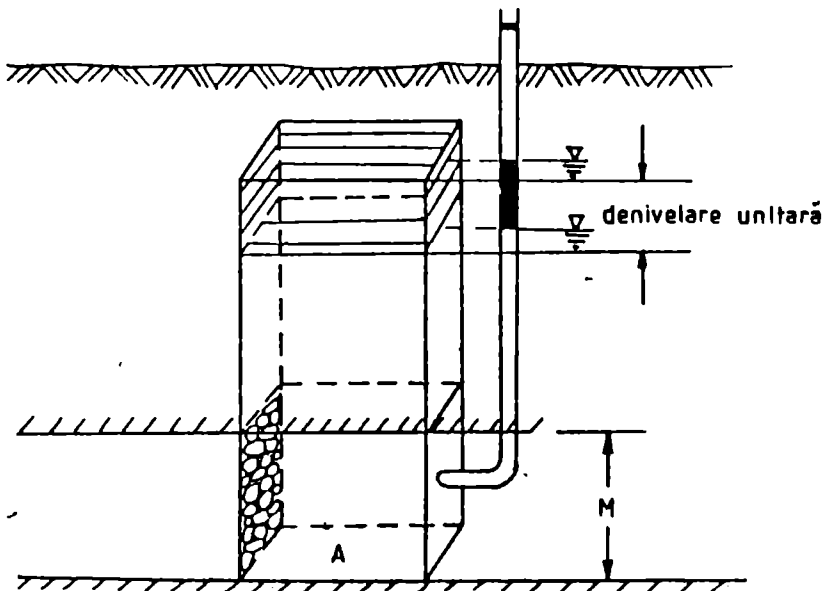


Figura 9.4: Acumularea specifică a unui acvifer sub presiune.

Să considerăm (Figura 9.4) un punct în care se elimină prin pompaj volumul de apă AV_0 din volumul total AM unde A și M sunt suprafața afectată de pompaj, respectiv grosimea acviferului. Pompajul conduce la o micșorare a presiunii neutrale și prin creșterea eforturilor efective, la micșorarea porozității. Invers această micșorare a porozității conduce, prin eliminarea apei la variația sarcinii.

Cu alte cuvinte în acviferele sub presiune acumularea specifică are a efect variația sarcinii piezometrice și invers : orice variație locală a sarcinii piezometrice conduce la acumulare sau cedare de fluid.

Înlocuind în ecuația de continuitate (9.5) relația (9.14) obținem forma finală a ecuației de mușcare a apei în acvifere sub presiune.:

$$\operatorname{div}(\rho k \operatorname{grad} \varphi) = \rho S_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (9.17)$$

9.3. Ecuația de continuitate în acvifere cu nivel liber.

În acviferele cu nivel liber fluidul nu ocupă decât o parte a stratului permeabil. Neglijând zona de aerare, separarea apă- aer se face printr-o limită netă, denumită *suprafață liberă*. Din această cauză acviferele cu nivel liber se comportă esențial diferit de cele sub presiune. Astfel, dacă în acviferele sub presiune acumularea (sau drenarea) apei, reprezintă efectul compresibilității apei și a matricii solide, în acviferele cu nivel liber aceste două efecte sunt neglijabile : volumul de apă acumulat sau drenat ca urmare a variației sarcinii piezometrice va implica o ridicare sau coborâre a suprafeței libere. În consecință în orice punct al unui acvifer cu nivel liber densitatea ρ și porozitatea n sunt constante.

Să considerăm atunci un volum de control dintr-un acvifer cu nivel liber, care, în virtutea celor arătate mai sus trebuie să includă și un element de suprafață liberă. (Figura 9.5). Pentru acest volum, conservarea masei implică atunci ca diferența dintre masele care intră și cele care părăsesc volumul în intervalul de timp δt să fie egală cu masa acumulată în același interval de timp. Să considerăm un acvifer având suprafața culcușului orizontală și fie atunci un element infinitezimal al volumului de control situat la cota z . Dacă notăm cu q_y și h_z vitezele de filtrație, respectiv sarcina piezometrică în centrul suprafeței dA_y , atunci masa care intră în intervalul de timp δt pe această suprafață elementară este :

$$dm_y = \rho q_y dA_y \delta t = \rho q_y dx dz \delta t \quad (9.18)$$

Pe toată suprafață A_y va pătrunde masa m_i :

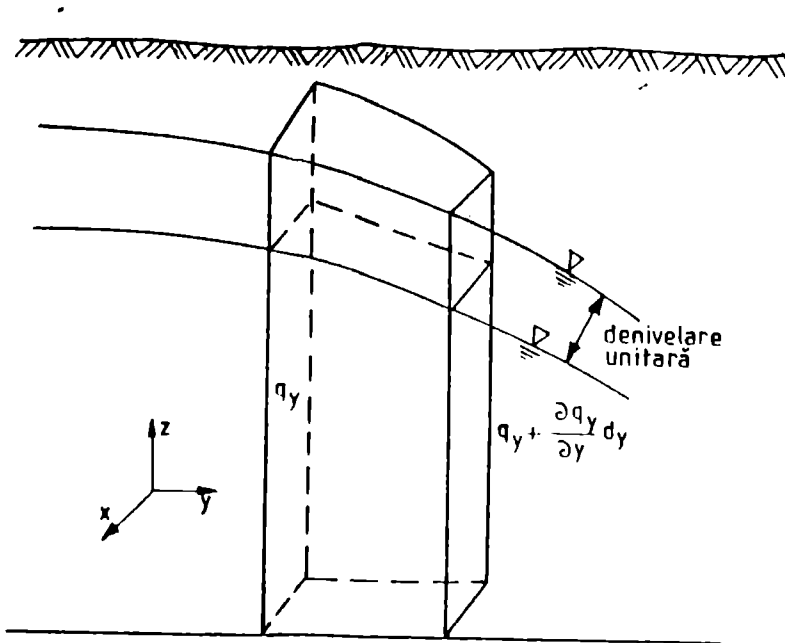


Figura 9.5: Bilanțul masic pe un element al unui acvifer cu nivel liber.

$$m_i = -\rho \left[\int_0^h q_y dz \right] dx \delta t \quad (9.19)$$

Analog masa care iese prin suprafața opusă este:

$$m_e = \rho \left[\int_0^h \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dz \right] dx \delta t \quad (9.20)$$

Dacă vom presupune că variațiile vitezei pe verticală sunt neglijabile, componenta q_y nu depinde de z . În acest caz derivarea de direcția x poate afecta întreaga integrală astfel încât bilanțul masic Δm_y pentru suprafețele paralele cu planul XOZ , devine:

$$\Delta m_y = m_i - m_e = -\rho \left[\int_0^h q_y dz \right] dy dx \delta t \quad (9.21)$$

Efecuând aceleași operații pentru fețele paralele cu planul YOZ , obținem pentru bilanțul masic Δm_x :

$$\Delta m_x = -\rho \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^h q_x dz \right] dx dy \delta t \quad (9.22)$$

Diferența dintre masele care intră și cele care părăsesc volumul de control are atunci forma:

$$\Delta m = -\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h q_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h q_y dz \right] dx dy \delta t \quad (9.23)$$

sau , ținând seama de legea Darcy:

$$\Delta m = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} k_x \int_0^h \frac{\partial h}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial y} k_y \int_0^h \frac{\partial h}{\partial y} dz \right] dx dy \delta t \quad (9.24)$$

In același interval de timp masa de apă Δm conduce la variația suprafeței libere cu Δh , astfel încât avem:

$$\Delta m = n_e \Delta h dx dy \quad (9.25)$$

unde n_e este porozitatea efectivă. Egalând cele două expresii (9.23) și (9.24) ale lui Δm și trecând la limită pentru δt obținem forma generală a ecuației de continuitate

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_x \int_0^h \frac{\partial h}{\partial x} dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y \int_0^h \frac{\partial h}{\partial y} dz \right] = n_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (9.26)$$

Spre deosebire de acviferele sub presiune a căror mișcare este descrisă de ecuația (9.17) , o ecuație cu derivate parțiale, mișcarea apei în acvifere cu nivel liber este descrisă de o ecuație

integrală. Fie atunci $(\partial h/\partial x)_m$ valoarea medie a derivatei sarcinii piezometrice pe verticală de la fântă de:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_m = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial h}{\partial x} dz \quad (9.27)$$

Vom introduce o valoare medie $(\partial h/\partial y)_m$ și pentru derivata pe direcția OY

Atunci termenii integrali din ecuația (9.26) vor fi înlocuiți cu termenii de tipul $h \frac{\partial h}{\partial x}$,

respectiv $h \frac{\partial h}{\partial y}$ iar mișcarea apei în acvifere cu nivel liber este descrisă tot de o ecuație cu derivate parțiale de forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y h \frac{\partial h}{\partial y} \right] = n_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (9.28)$$

Comparând cele două ecuații de mișcare pentru acvifere cu nivel liber (9.28), respectiv pentru acvifere sub presiune (9.17) constatăm următoarele:

- Stocarea apei este caracterizată prin acumularea specifică în cazul acviferelor sub presiune și prin porozitatea eficace în cazul acviferelor cu nivel liber. În primul caz este necesară o comprimare sau destindere a scheletului solid, în cel de-al doilea caz acesta rămâne nemodificat.

- Mișcarea apei subterane este descrisă de o singură ecuație cu derivate parțiale: (9.17) în cazul acviferelor sub presiune, respectiv (9.28) în cazul acviferelor cu nivel liber. Prima este o ecuație *parabolică lineară* având ca termeni numai derivatele de ordinul doi al sarcinii piezometrice. Spre deosebire de aceasta mișcarea apei în acvifere cu nivel liber este descrisă de o ecuație *parabolică nelineară* în ai cărei termeni intervin și pătratele derivatelor de ordinul întâi ale nivelului piezometric .

Condițiile în care aceste două ecuații au o soluție unică fac obiectul capitolului următor.

10. ANALIZA MIȘCĂRII APELOR SUBTERANE

Scopul oricărei analize cantitative este de a face posibilă prognozarea procesului resoectiv. Dacă ecuațiile cu derivate parțiale prezentate în capitolul anterior descriu mișcarea apei subterane în orice acvifer, în acest capitol vom studia condițiile care trebuie îndeplinite pentru analiza unui acvifer particular. Vom echivala acviferul cu un sistem, interfețele sale de legătură cu mediul fiind frontierele sale naturale.

Matematic, acțiunea mediului înconjurător se traduce prin condiții impuse pe aceste frontiere. Dacă aceste condiții sunt corect impus, ecuația cu derivate parțiale are o soluție unică și prin rezolvarea ei putem determina evoluția nivelelor piezometrice în condițiile date.

Frontierele acviferelor sub presiune sunt cunoscute aprioric, fiind limitele geologice ale bazinului subteran. Suprafața liberă – una din frontierele acviferului cu nivel liber – nu este cunoscută aprioric iar stabilirea și rezolvarea ecuației suprafeței libere reprezintă o componentă intrinsecă a analizei evoluției acviferului.

10.1. Probleme corect (bine) puse

Ecuațiile (9.17) sau (9.28) prezentate în capitolul anterior descriu o clasă de fenomene, dar nu furnizează nici un fel de informație asupra mișcării apei într-un anumit acvifer. Mai mult, dacă în ecuația (9.17) parametrii K și S au alte semnificații fizice, spre exemplu conductivitatea termică, respectiv capacitatea calorică, ecuația respectivă descrie transmiterea cădurii, prin conducție, într-un corp solid. Ecuația cu derivate parțiale are deci o infinitate de soluții, corespunzând unei infinități de probleme care pot descrie fenomene de natură fizică diferită.

Trebuie deci adăugate informații suplimentare care să permită rezolvarea fără ambiguități ale unei probleme particulare. Acestea sunt:

1. Forma, geometria domeniului în care are loc curgerea. Trebuie precizate limitele acviferului, relațiile stratului purtător cu stratele învecinate și frontierele care separă acviferul de mediul înconjurător.

2. Distribuția parametrilor hidraulici (conductivitatea, coeficientul de înmagazinare) pe tot domeniul de curgere.

3. Condițiile inițiale care să precizeze starea acviferului la momentul inițial.

4. Informații referitoare la acțiunea mediului exterior asupra acviferului, informații descrise din punct de vedere matematic prin condițiile la limitele acviferului.

Dacă aceste condiții sunt îndeplinite atunci problema formulată de una din ecuațiile cu derivate parțiale corespunde unei realități fizice. În general, se poate demonstra că o problemă matematică reflectă univoc o problemă fizică, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. Condiția de existență: există o soluție a problemei date;

2. Condiția de unicitate: pentru condiții inițiale și de contur date, soluția problemei este unică.

3. Condiția de stabilitate: soluția problemei prezintă variații continue în raport cu datele acestora: caracteristicile hidraulice, condițiile inițiale și cele de contur, etc.

În cazul în care aceste trei condiții sunt îndeplinite se spune că problema este bine (corect) pusă din punct de vedere matematic.

Dacă primele două condiții sunt intuitive, a treia condiție necesită precizări.

Să considerăm de exemplu o variație mică a conductivității. Atunci, dacă soluția este stabilă, vom obține o nouă soluție dar care este doar puțin diferită de cea a problemei precedente. La fel, o variație oarecare a condițiilor de margine conduce la o variație corespunzătoare a soluției. Nerespectarea condiției de stabilitate duce la soluții instabile care, pentru variații mici în datele de intrare, indiferent de natura acestora, (caracteristici de material, condiții inițiale sau de contur, etc.) prezintă variații mari ale soluției.

Dacă problema este bine (corect) pusă, atunci rezolvarea ecuațiilor (9.17) sau (9.28) permite determinarea caracteristicilor sistemului acvifer (distribuția sarcinii piezometrice, a debitelor, etc) în cazul modificării condițiilor naturale ale acestuia. Se realizează astfel o prognoză a evoluției sistemului acvifer în condițiile exploatării acestuia.

10.2. Condițiile inițiale.

Studiul evoluției acviferului implică cunoașterea stării acestuia la un moment dat, considerat ca moment inițial al procesului. Matematic, condițiile inițiale ale problemei implică definirea sarcinii

piezometrică φ , la momentul inițial, $t_0=0$, pe tot domeniul ocupat de acvifer, inclusiv pe conturul acestuia. Avem atunci:

$$\varphi(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z) \quad (10.1)$$

unde f este o funcție cunoscută.

Trebuie amintit faptul că mișcarea apelor subterane, descrisă de ecuațiile (9.17) sau (9.28) este un proces disipativ, care evoluează doar într-un anumit sens. Aceasta înseamnă că vom obține o soluție stabilă doar pentru $t_0 > 0$. Tendința de a determina istoria acviferului prin rezolvarea ecuației de curgere pentru timpi negativi este un exemplu tipic de problemă prost (incorect) pusă ce conduce la soluții instabile.

10.3. Condiții de margine.

După cum am arătat în paragraful 10.1, condițiile de contur reflectă legătura acviferului cu mediul înconjurător, fapt care impune cunoașterea fie a parametrului de stare a fluidului (nivelul piezometric) fie a fluxului pe toate limitele acviferului.

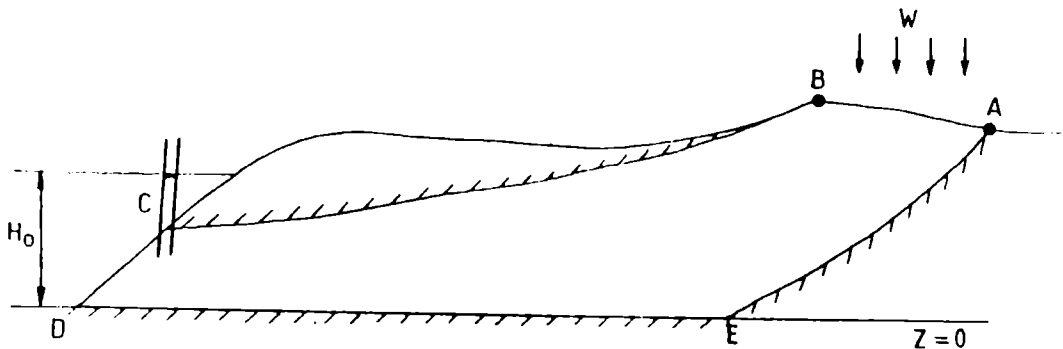


Figura 10.1: Condiții naturale de margine

Să considerăm, pentru exemplificare, cazul unui acvifer alimentat din precipitații pe limita AB și care se descarcă în apele de suprafață pe limita CD (Figura 10.1). Vom deosebi două cazuri:

1. Sarcina piezometrică cunoscută. (Problema Dirichlet).

Pe porțiunea CD , din continuitatea sarcinii rezultă că nivelul piezometric φ în acvifer este egal cu cotele apelor de suprafață H . Avem deci:

$$\varphi|_{CD} = H \quad (10.2)$$

Mai general, dacă pe toată suprafața S care mărginește domeniul D al acviferului se cunoaște sarcina piezometrică avem condiții de margine de tip sarcină piezometrică impusă (cunoscută) de forma:

$$\varphi(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \quad (10.3)$$

unde $f(x, y, z, t)$ este o funcție cunoscută.

Această problemă cunoscută sub numele de problema Dirichlet, este o problemă bine pusă și poate fi formulată astfel:

Să se rezolve ecuația de mișcare (9.17) pentru condiții inițiale de forma (10.1) și condiții de margine de tipul (10.3).

2. Flux normal cunoscut (Problema Neumann).

Pe porțiunea AB acviferul este alimentat prin precipitații a căror valoare eficace (partea din precipitații care se infiltrează) este W . Dacă notăm cu n versorul normalei exterioare atunci avem:

$$\bar{q} \cdot \bar{n}|_{AB} = q_n = W \quad (10.4)$$

În relația (10.4) am notat cu q debitele specifice în acvifer, iar prin q_n componenta acestora de-a lungul normalei la suprafața AB . (Figura 10.2)

Problema prezentată poate fi generalizată: dacă pe toată suprafața S care mărginește domeniul D al acviferului se cunoaște componenta normală a fluxului avem condiții de margine de tip flux normal impus (cunoscut) de forma:

$$q_n|_S = \bar{q} \cdot \bar{n}|_S = g(z, y, z, t) \quad (10.5)$$

unde q_n este proiecția debitului specific pe direcția normalei exterioare a suprafeței S ce mărginește domeniul D iar $g(x, y, z, t)$ este o funcție cunoscută

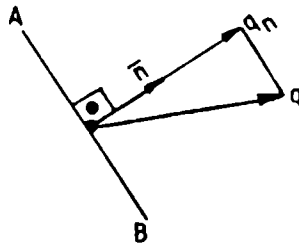


Figura 10.2: Condiție la limită de tip Neumann

Avem atunci a doua problemă la limite, sau problema Neumann care este o problemă bine pusă și poate fi formulată astfel:

Să se rezolve ecuația de mișcare (9.17) pentru condiții inițiale de forma (10.1) și condiții de margine de tipul (10.5).

Introducând pentru debitul specific expresia sa definită de legea Darcy, condiția (10.5) devine:

$$-K \text{grad } \varphi \cdot n = g(z, y, z, t) \quad (10.6)$$

Cum proiecția gradientului unei funcții scalare pe o direcție reprezintă derivata funcției respective pe acea direcție, condiția de margine de tip Neumann devine:

$$-K \frac{\partial \varphi}{\partial n} = g(z, y, z, t) \quad (10.7)$$

unde $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ este derivata sarcinei piezometrice după direcția normalei exterioare la suprafața S ce mărginește acviferul.

Un caz particular de condiție de margine de-tip Neumann îl constituie limitele impermeabile, cum sunt BC și DE (Figura 10.1). În acest caz fluxul este evident nul și simplificând cu K relația (10.7) devine:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (10.8)$$

Cu alte cuvinte în lungul unei limite impermeabile derivata sarcinei piezometrice după direcția normalei exterioare la suprafața S ce definește limita este nulă.

3. Condiții de margine mixte (Cauchy- Fourier).

În multe situații la contactul dintre acvifere și apele de suprafață apare un strat subțire, cu conductivitate redusă, datorat colmatării acviferului cu sedimente fine purtate de râuri în timpul viiturilor. Acest strat semipermeabil, de grosime M și conductivitate K generează o diferență între sarcina din acvifer și nivelul H_0 ale apelor de suprafață. (Figura 10.3).

Debitul specific prin stratul semipermeabil are expresia:

$$q_n = K \cdot \frac{H_0 - H}{M} \quad (10.9)$$

După cum se observă, condiția de margine (10.9) se deosebește esențial de condițiile de margine de tip Dirichlet sau Neumann în sensul că exprimă legătura sistemului (acviferul) cu mediul înconjurător atât în funcție de debite cât și în funcție de sarcina $\varphi=H$, necunoscută din acvifer. Din această cauză condițiile de margine de tipul (10.9) sunt de tip mixt: sarcină piezometrică și debit.

Generalizând, a treia problemă la limite (Cauchy - Fourier) poate fi enunțată astfel:

Să se rezolve ecuația (9.17) valabilă în tot domeniul D , mai puțin pe frontiera S a acestuia unde este valabilă condiția (10.9).

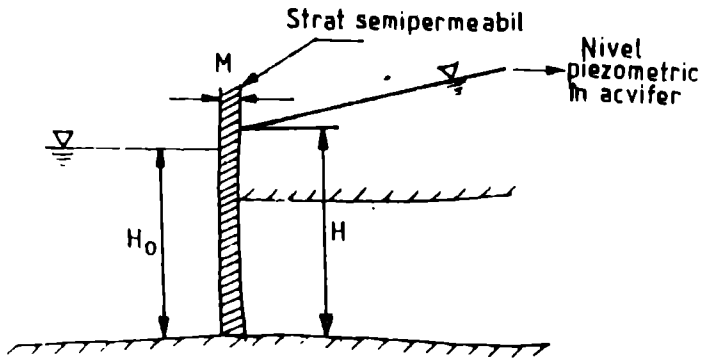


Figura 10.3: Condiție de margine de tip mixt.

Evident, într-o problemă practică nu avem peste tot același tip de condiții. Așa cum sugerează figurile (10.1) și (10.3) pe unele porțiuni ale conturului avem condiții de margine de tip Neumann, pe altele de tip Dirichlet sau Cauchy-Fourier.

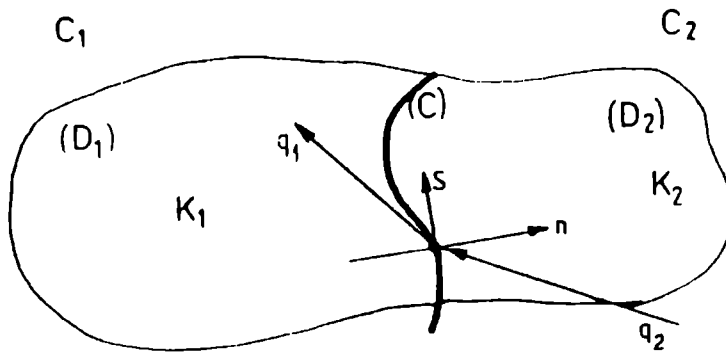


Figura 10.4: Subdomeniile de conductivitate diferită separate printr-o interfață.

10.4. Discontinuitatea parametrilor hidrogeologici.

Ecuatiile de mișcare sunt valabile pentru medii neomogene și anizotrope în care însă parametrii hidrogeologici (conductivitatea sau coeficientul de înmagazinare) sunt funcții continue de punct. Mediile geologice sunt însă caracterizate de multe ori de limite care separă zone cu proprietăți distincte: în lungul acestor limite funcțiile care descriu distribuția spațială a parametrilor hidrogeologici suferă o discontinuitate. Să considerăm, spre exemplu cazul a două medii omogene de conductivități K_1 și K_2 separate de limita C (Figura 10.4), și fie ϕ_1 și ϕ_2 sarcinile piezometrice în cele două subdomenii

Vom împărți problema în două subdomenii în fiecare din ele fiind valabilă ecuația Laplace având soluțiile ϕ_1 și ϕ_2 . Pentru fiecare subdomeniu putem formula o problemă la limite: pentru domeniul D_1 limitele vor fi $C_1 + C$, iar pentru subdomeniul D_2 vom avea limitele $C_2 + C$. Cum limita C aparține ambelor subdomenii pe această limită vor trebui specificate condiții de margine speciale care să 'lege' cele două soluții ϕ_1 și ϕ_2 .

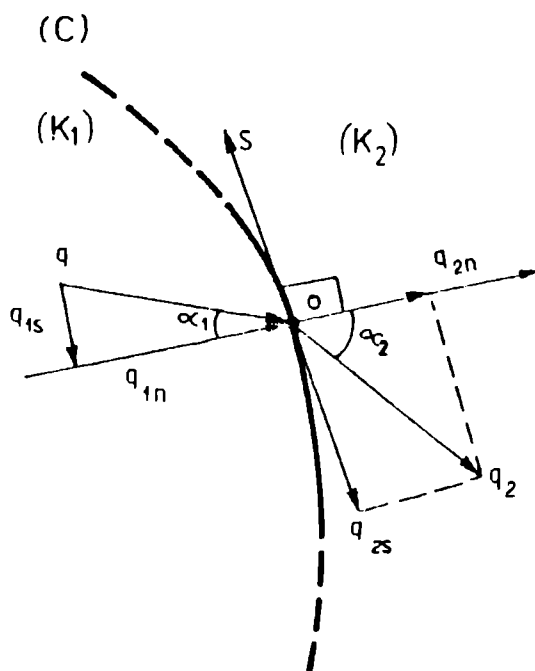


Figura 10.5: Continuitatea componentelor fluxului și refracția liniilor de curent pe interfață.

Prima condiție se obține ținând seama că pentru orice punct de pe interfața C presiunea trebuie să fie aceeași. Cum cota z a punctului rămâne constantă, continuitatea presiunilor implică și continuitatea sarcinilor piezometrice:

$$\varphi_1|_C = \varphi_2|_C \quad (10.10)$$

A doua condiție se obține din continuitatea debitelor care traversează limita de separație C în orice punct al acesteia (Figura 10.5) și revine, conform definiției fluxului specific la continuitatea componentelor normale ale acestora:

$$q_{1n}|_C = q_{2n}|_C \quad (10.11)$$

sau, conform legii Darcy:

$$K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (10.12)$$

Pe de altă parte, din continuitatea sarcinii se deduce și continuitatea derivatei acesteia în lungul tangentei s la interfața C . Atunci derivând ecuației (10.10) în lungul tangentei la suprafața C , obținem:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \quad (10.13)$$

și ținând seama de legea Darcy:

$$\frac{q_1|_s}{K_1} = \frac{q_2|_s}{K_2} \quad (10.14)$$

Fie (Figura 10.5) q_1 și q_2 valorile debitelor specifice într-un punct oarecare al interfeței; să notăm cu α_1 respectiv α_2 unghiurile făcute de acești vectori cu normala la interfața C . Avem atunci:

$$\begin{aligned} q_{1s} &= q_{1n} \operatorname{tg} \alpha_1 \\ q_{2s} &= q_{2n} \operatorname{tg} \alpha_2 \end{aligned} \quad (10.15)$$

și, ținând seama de relațiile (10.12) și (10.14):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{K_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{K_2} \quad (10.16)$$

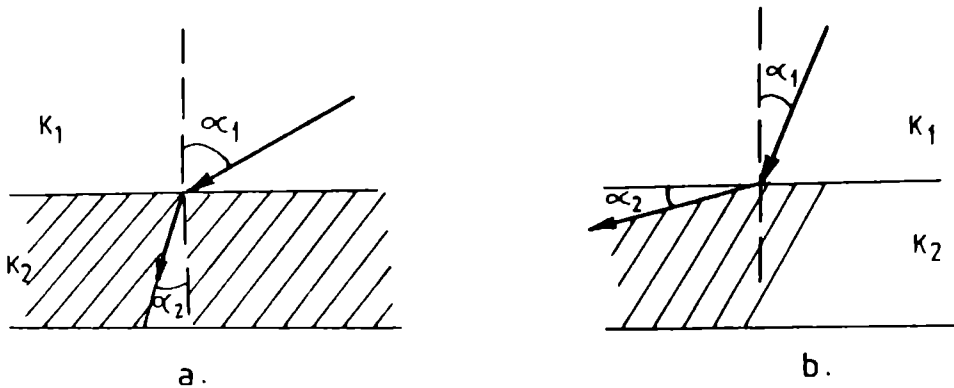


Figura 10.6: Refracția liniilor de curent pe interfață. (a: $K_1 \gg K_2$; b: $K_1 \ll K_2$)

Pe suprafața de contact a două zone cu valori diferite ale conductivității hidraulice are loc o refracție a liniilor de curent, iar pentru probleme bidimensionale unghiurile de refracție sunt funcție de conductivități, conform relației (10.16).

Să considerăm (Figura 10.6.a) trecerea de la o zonă cu conductivitate foarte mare la o zonă cu conductivitate foarte redusă. În acest caz $K_1 \gg K_2$ și conform relației (10.16) $\alpha_1 \gg \alpha_2$: la trecerea într-un mediu mai puțin permeabil liniile de curent devin perpendiculare pe limita de contact. În același timp liniile de curent în stratul permeabil sunt practic paralele cu limita de separație. Acest tip de limită este considerat de multe ori în analiza acviferelor ca fiind “practic impermeabilă”, neglijând curgerea în stratul mai puțin permeabil asimilat cu un acvitard.

Invers, în trecerea de la o zonă cu valori reduse de conductivitate $K_2 \gg K_1$, $\alpha_1 \ll \alpha_2$: liniile de curent în stratul mai conductor sunt practic paralele cu limita de separație. (Figura 10.6.b), iar în cel mai puțin permeabil liniile de curent sunt practic normale pe limita comună. Din această cauză se consideră de cele mai multe ori că mișcarea apei subterane într-un acvitard ce separă două acvifere este practic verticală.

10.4. Ecuația suprafeței libere.

Spre deosebire de interfețele analizate în paragraful precedent, suprafața liberă separă două faze: apa și aerul. În consecință, suprafața liberă este o limită a domeniului și, conform primei condiții prezentate în paragraful (10.1) ea trebuie cunoscută a priori. Este deci necesară o ecuație suplimentară care să determine poziția suprafeței libere. Continuitatea presiunilor impune ca pe această limită presiunile în apă și în aer să fie egale. Atunci, luând ca presiune de referință presiunea aerului, $p_{aer} = 0$, expresia sarcinii piezometrice într-un de pe suprafața liberă este:

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho g} + z = z \quad (10.17)$$

Rezultă că suntem în fața unui cerc vicios: determinarea sarcinii piezometrice impune cunoașterea întregului domeniu de mișcare a apei, iar determinarea domeniului implică cunoașterea sarcinii piezometrice în orice punct al suprafeței libere.

Este deci necesară o condiție de margine suplimentară pe suprafața liberă. Vom considera deci cazul general al determinării condiției de margine pentru suprafața liberă în regim tranzitoriu și vom rescrie ecuația (10.17) în forma:

$$F(x, y, z, t) \equiv \varphi(x, y, z, t) - z = 0 \quad (10.18)$$

unde $F(x, y, z, t)$ este ecuația curbei care definește suprafața liberă. Fie W debitele de alimentare orientate vertical în jos și q debitul specific într-un punct de pe suprafața liberă. (Figura 10.7)

Viteza $n_e \cdot V_F$ de deplasare a suprafeței libere este în fapt rezultanta acestor debite și din continuitatea componentelor normale ale acestora avem:

$$(\overline{W} - \overline{q}) \cdot \overline{n} = n_e \overline{V}_F \cdot \overline{n} \quad (10.19)$$

unde n_e este porozitatea eficace. Cum poziția suprafeței libere se modifică în timp, viteza de variație a poziției unui punct aparținând acestei suprafețe este dată de derivata totală și ținând seama și de relația (10.19) avem:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V_F \text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{W - q}{n_e} \text{grad } F = 0 \quad (10.20)$$

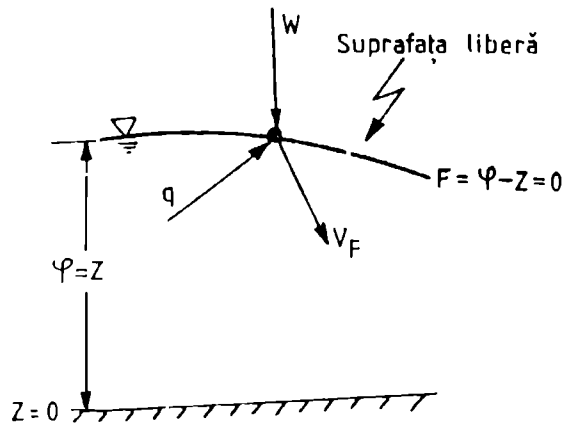


Figura 10.7:

De remarcat că în relațiile (10.19) și (10.20) apare porozitatea eficace n_e și nu porozitatea totală n , deoarece în mișcarea apei intervin doar porii interconectați, care asigură continuitatea circulației apei.

Revenind la ecuația (10.20) se observă că în cazul regimului permanent și în absența alimentării pe verticală avem $\partial F / \partial t = 0$ și $W = 0$ iar relația (10.20) se reduce atunci la:

$$\bar{q} \text{grad } F = 0 \quad (10.21)$$

Cum $\text{grad } F$ este orientat pe direcția normalei la suprafața liberă, anularea produsului scalar din relația (10.21) conduce la concluzia că în regim permanent, fără alimentare pe verticală, viteza unui punct de pe suprafața liberă este tangentă la aceasta. Cu alte cuvinte în condițiile particulare menționate, suprafața liberă este linie de curent.

Revenind la evoluția suprafeței libere, avem din relația (10.22):

$$\text{grad } F = \text{grad } \varphi - \bar{k} \quad (10.22)$$

unde k este versorul axei verticale.

Înlocuind atunci în (10.20) avem:

$$n_e \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -k \text{ grad } \varphi \cdot (\text{grad } \varphi - \bar{k}) - \bar{W} \text{ grad } F \quad (10.23)$$

Cu observația că precipitațiile fiind orientate vertical în jos $W = kW$, obținem condiția pentru un punct de pe suprafața liberă în cazul unui mediu anizotrop:

$$n_e \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[K_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + K_z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} (K_z + W) + W \right] \quad (10.24)$$

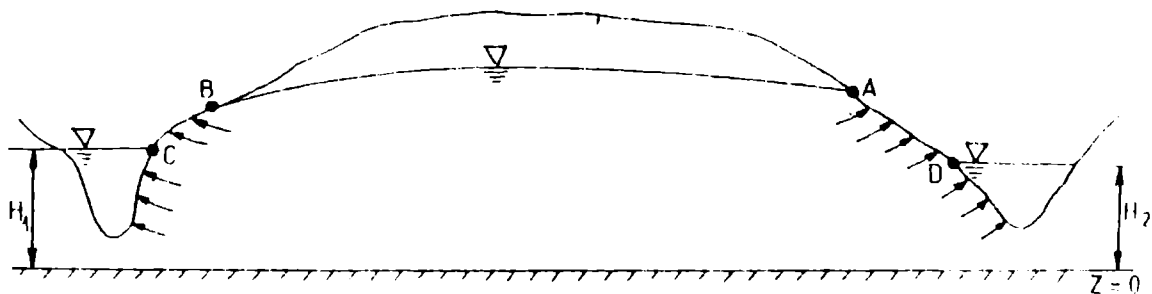


Figura 10.8: Suprafața liberă și zonele de izvorâre într-un acvifer cu nivel liber.

După cum se observă condiția de margine pentru suprafața liberă este descrisă de o ecuație cu derivate parțiale nelineară. Reamintind că mișcarea apei în acvifere freatice este descrisă tot de o ecuație nelineară înțelegem de ce soluționarea analitică a problemelor cu suprafață liberă este extrem de dificilă și a fost făcută doar pentru cazuri foarte simple. Problema este în general rezolvată prin metode numerice unde prin iterații succesive se modifică configurația domeniului de curgere până este satisfăcută condiția (10.17)

La descărcarea acviferelor cu nivel liber în apele de suprafață, suprafața liberă nu este în contact direct cu acestea astfel încât capetele ei să poată fi eventual determinate printr-o condiție de tip Dirichlet. Există întotdeauna zone de izvorăre ale apei subterane, cum este cazul segmentelor BC și AD din *Figura 10.8*. Fiind în contact cu aerul presiune pe zona de izvorăre este egală cu cea atmosferică astfel încât dealungul ei avem o condiție analoagă cu (10.17):

$$p = z \quad (10.25)$$

În punctele de racord A și D suprafața liberă este tangentă la limitele AB sau DE . Aceste puncte sunt de altfel singurele necunoscute ale zonei de izvorăre iar determinarea lor este o parte a problemei de analiză a acviferelor cu nivel liber.

11. PROBLEME BIDIMENSIONALE IN HIDRAULICA SUBTERANĂ

11.1. Schematizarea Dupuit

Când am dedus ecuația de mișcare a apei în acvifere cu nivel liber (9.) am acceptat tacit ipoteza sarcinii piezometrice constante pe verticală. Această ipoteză datorată lui Dupuit prezintă marele avantaj de a permite aproximarea unor probleme tridimensionale cu soluțiile unor probleme bi- sau chiar monodimensionale.

Ipoteza Dupuit pornește de la observația că pantele suprafețelor libere ale acviferelor freatice sunt reduse de ordinul $1/1000$ sau chiar $1/10000$.

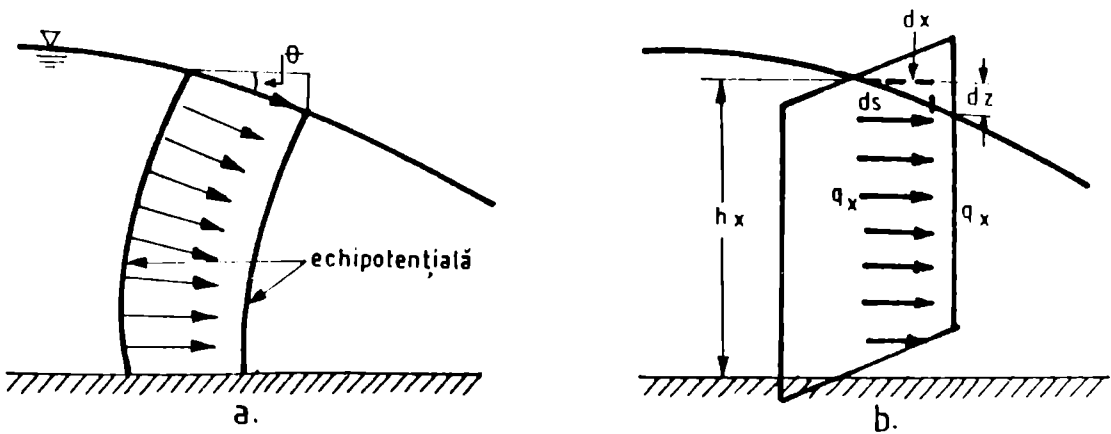


Figura 11.1: Echipotențiale în cazul unui acvifer cu nivel liber

a: situația reală; b: schematizarea Dupuit.

Să considerăm atunci un acvifer cu nivel liber, fără alimentare pe verticală, în care mișcarea are loc în regim permanent (Figura 11.1.a). În acest caz suprafața liberă este linie de curent iar debitele specifice q_x într-un punct de pe suprafață au expresia:

$$q_x = -K \, d\varphi / dx = -K \, dz/ds = -K \sin \theta \quad (11.1)$$

unde am notat cu ds elementul de arc al suprafeței libere. Înlocuirea lui φ cu z este perfect valabilă deoarece conform relației (10.17) pe suprafața liberă, dar numai acolo, egalitatea $\varphi = z$ este valabilă.

În cazul însă în care panta suprafeței libere este foarte redusă putem aproxima sinusul cu valoarea arcului și implicit cu tangenta acestuia. Aceasta revine la:

$$\sin \theta \cong \operatorname{tg} \theta \cong dh / dx \quad (11.2)$$

În ultima egalitate din relația (11.2) am înlocuit sarcina piezometrică φ cu cota h a suprafeței libere. Aceasta înseamnă că:

- echipotențialele sunt verticale;
- vitezele sunt orizontale în orice punct (*Figura 11.1.b*).

Faptul că sarcina nu variază pe verticală înseamnă că am înlocuit o funcție de două variabile $\varphi(x, z)$ cu o funcție de o singură variabilă $h(x)$ reducând astfel analiza mișcării la o problemă monodimensională

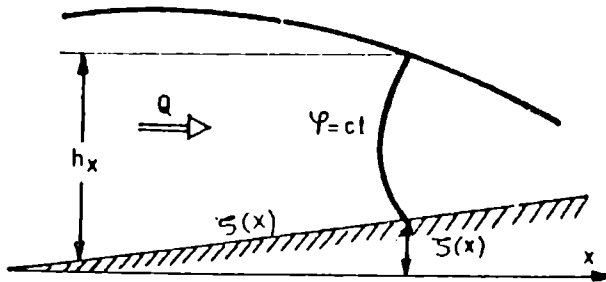


Figura 11.2

Pentru a estima ordinul de mărime introdus de aproximația Dupuit, să considerăm un acvifer cu nivel liber având panta culcușului dată de ecuația $\zeta(x)$. Valoarea exactă a debitelor va fi obținută prin integrarea pe verticală a gradientului (*Figura 11.2*). Avem:

$$Q = -K \int_{\zeta}^h \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz = -K \frac{d}{dx} \int_{\zeta}^h \varphi dz - \varphi(h) \frac{dh}{dx} + \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{dx} \quad (11.3)$$

În relația precedentă am aplicat regula de integrare a lui Leibniz întrucât integrarea se face doar în funcție de z . Deasemeni am notat cu $\varphi(h)$ și $\varphi(\zeta)$ valorile sarcinii piezometrice în punctele de cotă $z = h$, respectiv $z = \zeta$.

Fie φ_m valoarea medie pe verticală a sarcinii piezometrice, definită de:

$$\varphi_m = \frac{1}{h - \zeta} \int_{\zeta}^h \varphi dz \quad (11.4)$$

relația (11.3) devine atunci:

$$Q = -K \frac{d}{dx} \left[\varphi_m (h - \zeta) - \varphi(h) \frac{dh}{dx} + \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{dx} \right] \quad (11.5)$$

Dacă vom considera pațul aciferului orizontal ($\zeta = 0$), relația precedentă se reduce la:

$$Q = -K \frac{d}{dx} \left[\varphi_m \cdot h - \frac{h^2}{2} \right] \quad (11.6)$$

Pe de altă parte valorile debitelor în ipoteza Dupuit sunt:

$$Q = -K \frac{d}{dx} \left(h \frac{dh}{dx} \right) = K \frac{d}{dx} \left(\frac{h^2}{2} \right) \quad (11.7)$$

Comparând cele două expresii ale debitelor (11.6) și (11.7) observăm că din punct de vedere al valorii acestora, ipoteza Dupuit revine la aproximația:

$$\varphi_m \cdot h - \frac{h^2}{2} \approx \frac{h^2}{2} \quad (11.8)$$

Dacă echipotențialele tind către verticală, atunci (h și cele două relații ale debitelor devin identice. Se poate demonstra că înlocuirea sarcinii piezometrice reale cu valoarea aproximativă $\phi = h^2/2$, conduce la erori având expresia:

$$\varepsilon = \frac{i^2}{1+i^2}; \quad i = \frac{dh}{dx} \quad (11.9)$$

Deoarece pantele i sunt reduse $i^2 \ll 1$ iar erorile în debite sunt de ordinul i^2

11.2. Limitele aproximației Dupuit. Formula Dupuit-Forcheimer.

Să considerăm un acvifer cu nivel liber, având patul orizontal (*Figura 11.3*). Conform ipotezei Dupuit sarcina este constantă pe verticală și în acest caz întregul domeniu de mișcare poate fi echivalat cu un tub de curent subțire. Atunci debitele sunt date de:

$$Q = -Kh \frac{dh}{dx} \quad (11.10)$$

Dacă se cunoaște valoarea sarcinii piezometrice h_0 în originea sistemului de referință, atunci prin integrarea ecuației precedente obținem ecuația suprafeței libere în funcție de debitele care circulă prin acvifer:

$$Q_x = -K \int_{h_0}^{h(x)} h dh = \frac{K}{2} (h_0^2 - h(x)^2) \quad (11.11)$$

Să considerăm acum că în punctul B situat la distanța $x=L$ acviferul este în contact cu apele de suprafață care au nivelul H . Dacă ipoteza Dupuit este valabilă pe tot domeniul de curgere avem atunci o problemă Dirichlet, condițiile de margine fiind:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad h(0) &= h_0 \\ x = L \quad h(L) &= H \end{aligned} \quad (11.12)$$

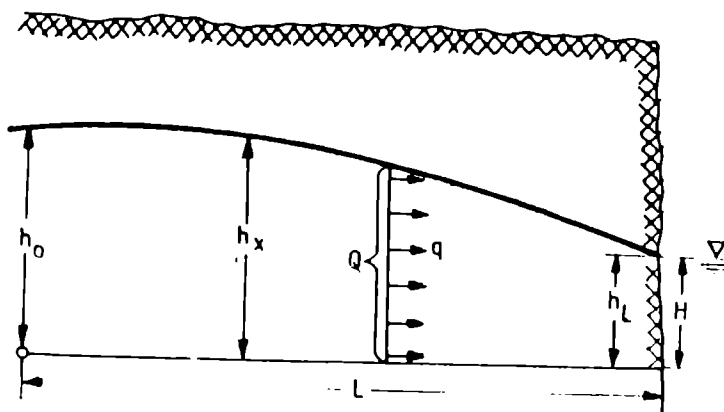


Figura 11.3: Mișcarea apei într-un acvifer freatic în schematizarea Dupuit

Înlocuind atunci a doua condiție în ecuația (11.11) obținem expresia debitelor sau formula Dupuit-Forcheimer:

$$Q = \frac{K}{2L} (H^2 - h_0^2) \quad (11.13)$$

Dar așa cum am arătat în capitolul precedent, în zonele de descărcare, suprafața liberă este întotdeauna deasupra apelor de suprafață fiind separate de acestea printr-o zonă de izvorâre. În zona de deșurare, deci, parabola Dupuit se abate de la suprafața piezometrică reală. În funcție de forma terenului suprafața liberă capătă forme diferite în funcție de unghiul de contact al terenului. Astfel, pentru $\alpha \geq 90^\circ$ (Figura 11.4 a și b) suprafața liberă este tangentă la suprafața terenului, iar pentru $\alpha < 90^\circ$, (Figura 11.4 c) suprafața liberă este tangentă la verticală.

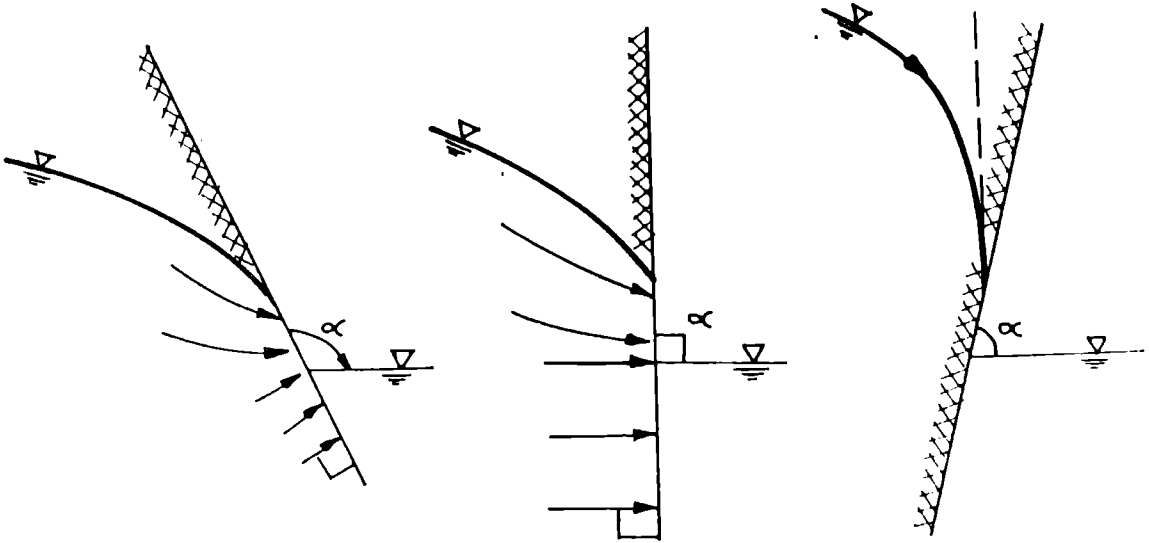


Figura 11.4: Suprafața liberă în zona de descărcare al unui acvifer cu nivel liber.

Abateri de la forma dată de parabola Dupuit apar și în punctul $x=0$ unde suprafața liberă trebuie să fie orizontală iar conform relației (11.11) panta suprafața liberă are panta dată de expresia:

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{Q}{Kh_0} \quad (11.14)$$

În restul domeniului, așa cum am arătat în paragraful precedent, parabola Dupuit prezintă abateri neglijabile de la suprafața liberă.

Trebuie însă subliniat că debitele calculate cu formula Dupuit-Forcheimer, rămân corecte chiar dacă în unele puncte parabola Dupuit prezintă abateri de la suprafața liberă. Această situație, cunoscută sub numele de paradoxul Dupuit se explică prin prezența zonei de izvorâre care compensează micșorarea pantei față de cea dată de parabola Dupuit prin mărirea ariei de curgere (Figura 11.5).

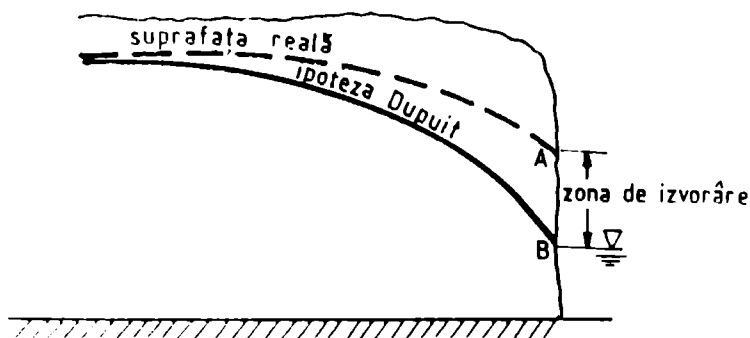


Figura 11.5: Efectul zonei de izvorâre.

11.3. Curgera plan- orizontală.

La scară regională acviferele sunt mult mai extinse în plan orizontal decât în adâncime. Astfel, dacă suprafața orizontală a acviferelor este în mod obișnuit de ordinul sutelor sau chiar miilor de m^2 , grosimea lor depășește foarte rar câteva sute de metri. Din această cauză variațiile sarcinii hidraulice pe verticală sunt reduse comparativ cu cele pe orizontală. Cu alte cuvinte schematizarea Dupuit poate fi extinsă și la probleme tridimensionale considerând că:

- sarcina hidrolică nu variază pe verticală;
- Componenta verticală a vitezei este neglijabilă și atunci mișcarea apei subterane are loc doar în plan orizontal.

În consecință sarcina piezometrică este funcție doar de două variabile spațiale: $\varphi = \varphi(x, y, t)$, iar problema tridimensională, descrisă de ecuația (9.4) se reduce la o problemă bidimensională. Înainte de a deduce ecuațiile de mișcare ale apei în condițiile valabilității schematizării Dupuit, vom introduce alți doi parametri caracteristici acviferului, dar numai în condițiile mișcării plan-orizontale: *transmisivitatea și coeficientul de înmagazinare*.

Să considerăm atunci un acvifer sub presiune, de grosime M (Figura 11.6), în care debitul tranzitat are expresia:

$$Q = - \int_0^M K \text{grad } \varphi \, dz \quad (11.15)$$

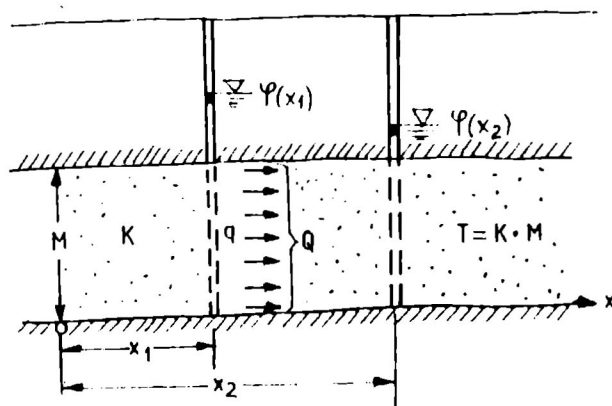


Figura 11.6: Schematizarea Dupuit în cazul unui acvifer sub presiune.

Deoarece în mișcarea plan-orizontală, sarcina este constantă pe verticală, relația precedentă devine:

$$Q = - \text{grad } \varphi \int_b^M K dz = -T \text{ grad } \varphi \quad (11.16)$$

unde am notat cu $T [L^2 T^{-1}]$ transmisivitatea acviferului, definită de:

$$T = \int_b^M K dz \quad (11.17)$$

În cazul în care conductivitatea este constantă pe verticală, transmisivitatea se definește simplu ca produs dintre conductivitatea hidrolică și grosimea stratului.

Transmisivitatea este un parametru caracteristic numai acviferelor sub presiune, în condițiile valabilității ipotezei Dupuit și are semnificația debitelor care parcurg unitatea de grosime a acviferului sub acțiunea unui gradient unitar.

În mod analog poate fi definit și *coeficientul de înmagazinare* al unui acvifer sub presiune. Vom relua pentru aceasta definiția dată de relația (9.) a înmagazinării:

$$S = \frac{\Delta V_{ap\acute{a}}}{V_{tot} \cdot \Delta \varphi} \quad (11.18)$$

Cum volumul acviferului V_{tot} din care este cedată apa este dată de produsul MA , unde A este aria acviferului, relația precedentă devine:

$$S = \frac{\Delta V_{ap\acute{a}}}{M \cdot A \cdot \Delta \varphi} \quad (11.19)$$

sau

$$S = \frac{\Delta V_{ap\acute{a}}}{A \Delta \varphi} \quad (11.20)$$

unde am notat prin S_0 coeficientul de înmagazinare a acviferului, parametru adimensional, conform ultimei egalități din relația (11.19).

Ca și transmisivitatea, coeficientul de înmagazinare este o caracteristică valabilă doar în cazul acviferelor sub presiune, în condițiile valabilității ipotezei Dupuit și are semnificația volumului de apă drenat (stocat) pe unitatea de arie a acviferului la o variație unitară a nivelului piezometric.

11.3 Problema plan orizontală în cazul acviferelor sub presiune.

Să considerăm un volum elementar de control dintr-un acvifer sub presiune de grosime M (Figura 11.7). În intervalul de timp δt volumul intrat este:

$$q_x M dy + q_y M dx \quad (11.21)$$

unde q_x și q_y sunt debitele specifice care intră pe fețele paralele cu planele ZOY , respectiv XOZ

. Volumul de apă drenat din volumul de control are expresia:

$$M \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + M \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \quad (11.22)$$

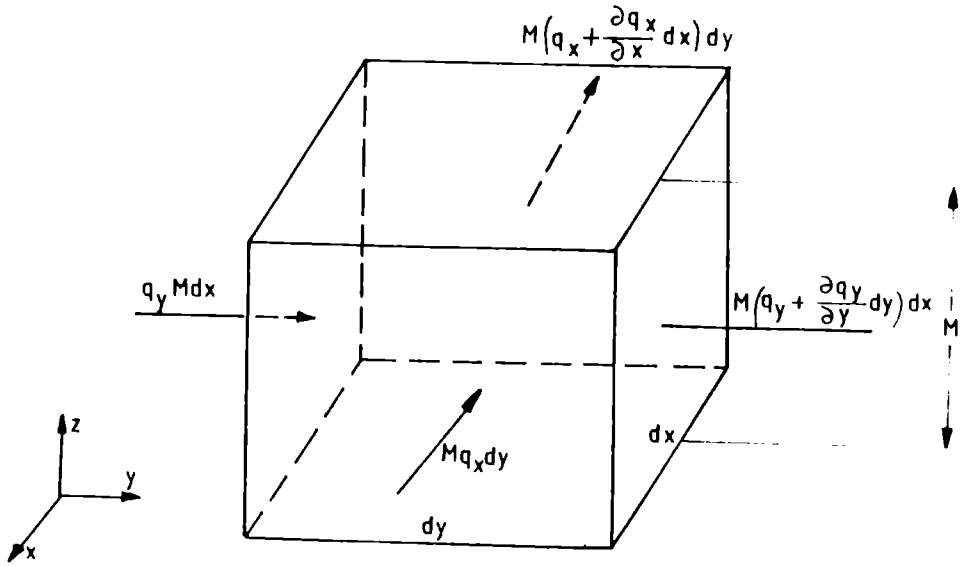


Figura 11.7: Ecuația de continuitate pentru un acvifer sub presiune în schematizarea Dupuit.

În același interval de timp nivelul piezometric variază de la $\phi(t)$ la $\phi(t + \delta t)$ iar volumul de apă acumulat este:

$$MS \cdot dx dy \cdot [\phi(t + \delta t) - \phi(t)] \quad (11.23)$$

Bilanțul masic pe volumul de control revine atunci la:

$$-M \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \delta t = SM [\phi(t + \delta t) - \phi(t)] \quad (11.24)$$

sau, trecând la limită pentru $\delta t \rightarrow 0$:

$$-M \operatorname{div} q = SM \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t + \delta t) - \phi(t)}{\delta t} = SM \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (11.25)$$

Dacă înlocuim debitele specifice din relația precedentă cu expresia lor din legea Darcy și ținând seama de expresiile (11.17) ale transmisivității, respectiv (11.20) ale coeficientului de înmagazinare, obținem ecuația de mișcare a apei subterane în acvifere sub presiune:

$$\operatorname{div}(T \operatorname{grad} \varphi) = S_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (11.26)$$

În cazul în care în punctele de coordonate x_i, y_i se află un puț cu debitul Q ecuația precedentă capătă forma finală:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q \delta(x_i, y_i) = S_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (11.27)$$

unde $\delta(x_i, y_i)$ este funcția Dirac [L^{-1}] iar Q sunt debitele extrase pe unitatea de grosime a acviferului [$L^2 T^{-1}$]. După cum se observă în condițiile ipotezei Dupuit mișcarea în acvifer este descrisă de o ecuație bidimensională.

11.4 Efectul drenanței în cazul acviferelor sub presiune.

Să considerăm un acvifer sub presiune separat printr-un strat semipermeabil (acvitatrd) de un alt acvifer superior. Fie φ și φ_n nivelele piezometrice în acviferul inferior respectiv în cel superior (Figura 11.8). Să presupunem că $\varphi_n > \varphi$. Atunci are loc o alimentare prin drenanță a acviferului inferior din cel superior. Dar, așa cum am arătat în capitolul 10 liniile de curent în acvitatrd sunt refractate aproape de normală, astfel încât mișcarea în acest strat este preponderent verticală, debitele tranzitate q^* având expresia:

$$q^* = K \cdot \frac{\varphi - \varphi_0}{M^*} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\sigma} \quad (11.28)$$

unde am notat cu:

- K^* și M^* conductivitatea, respectiv grosimea acvitarului;
- $\sigma = M^*/K^*$ coeficientul de drenanță a acvitarului [T].

Atunci ecuația de bilanț masic a acviferului (11.26) trebuie modificată prin introducerea debitelor de alimentare q^* :

$$\operatorname{div}(T \operatorname{grad} \varphi) + \frac{\varphi_0 - \varphi}{\sigma} = S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (11.29)$$

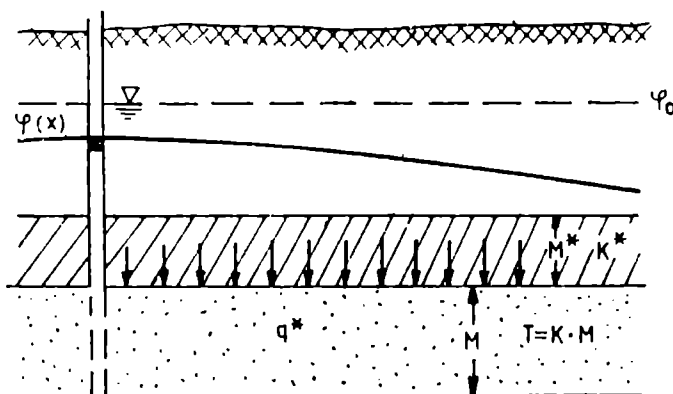


Figura 11.8: Efectul drenanței verticale

Dacă acviferul este omogen și izotrop, atunci prin împărțirea cu T ecuația precedentă devine:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\varphi_0 - \varphi}{\lambda^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (11.30)$$

Ecuția (11.30) introduce alți doi parametri caracteristici numai acviferelor sub presiune.

- factorul de drenanță $\lambda = (\sigma T)^{1/2}$ [L] care caracterizează distribuția spațială a drenanței;
- coeficientul de difuzie hidrodinamică $D = S/T$

11.3. Acvifere cu nivel liber.

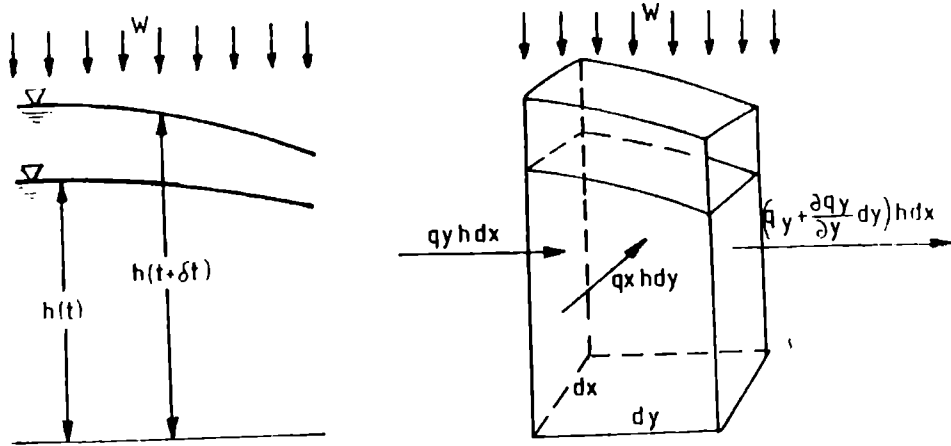


Figura 11.9: Conservarea masei într-un acvifer cu nivel liber în schematizarea Dupuit.

Ecuția de mișcare în cazul unui acvifer cu nivel liber se deduce urmând același raționament ca în cazul acviferelor sub presiune. Considerând aportul pe verticală datorat precipitațiilor W termenii ecuației de bilanț sunt (Figura 11.9):

- intrări:

$$\delta \cdot \left[q_x h dy + q_y h dx + n dx dy \right] \quad (11.31)$$

- ieșiri:

$$\delta \left[h \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + h \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \right] \quad (11.32)$$

- acumulări:

$$n_e dx dy [h(t + \delta) - h(t)] \quad (11.33)$$

Se observă că s-a ținut seama de schematizarea Dupuit considerând debitele specifice q_x și q_y constante pe toată grosimea lamei de apă h . Aceasta implică faptul că nivelul piezometric h este constant pe verticală fiind deci funcție de numai cele două variabile spațiale pe direcție orizontală x și y .

Deasemeni se neglijează deformabilitatea matricei solide, capacitatea de înmagazinare fiind egală doar cu porozitatea eficace n_e .

Scriind bilanțul masic și trecând la limită pentru $\delta \rightarrow 0$ obținem în definitiv ecuația de mișcare a apei în acvifere cu nivel liber, în condițiile ipotezei Dupuit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h K \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W = n_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11.34)$$

După cum se observă ecuația de mișcare a apei în acviferele cu nivel liber (11.34) este nelineară. Într-adevăr, să considerăm pentru simplificarea expunerii mediul omogen și izotrop. Atunci ecuația precedentă devine:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{W}{K} = \frac{n_e}{K} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11.35)$$

unde primii doi termeni evidențiază nelinearitatea ecuației.

Ori, rezolvarea unei ecuații nelineare este mult mai dificilă, indiferent de metodele de rezolvare utilizate, analitice sau numerice. Din această cauză este utilă a linearizarea ecuației de mișcare, pornind de la observația că termenii de tipul Kh pot fi echivalați cu transmisivitatea din ecuația de mișcare a apei în acvifere sub presiune (11.27). Trebuie însă menționat că spre deosebire de transmisivitate care este constantă în timp, transmisivitatea echivalentă variază în timp odată cu nivelul piezometric $h(x, y, t)$.

Aproximația făcută este atunci valabilă doar când variațiile în timp ale nivelului piezometric sunt reduse. Pornind de la această observație deosebim două tehnici de linearizare:

a. Se consideră că fluctuațiile nivelului piezometric h_v sunt neglijabile față de o valoare medie a acestuia h_m . Fie arunci $T_m = Kh_m$ și $T_v = Kh_v$ valorile medii a transmisivității echivalente, constantă în timp

și respectiv flucuațiile acesteia variabile în timp. Cum $T_m \gg T_v$ ultimile valori pot fi neglijate numai în produsul Kh din ecuația (11.34) care capătă forma lineară:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_m \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_m \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W = n_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11.36)$$

b. Termenul din dreapta al ecuației (11.34) poate fi scris în forma: $(n_e/h)[\partial h^2/2] \partial t$. Dacă flucuațiile nivelului piezometric sunt mici atunci termenul $n^* = (n_e/h)$ și numai acesta poate fi considerat constant, iar ecuația (11.34) devine lineară în h^2 :

$$K \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = n_e^* \frac{\partial h^2}{\partial t} \quad (11.37)$$

Dintre aceste două tehnici, prima este de departe cea mai des folosită deoarece, atunci când ipotezele făcute sunt valabile, conduce la o ecuație formal identică cu cea din cazul acviferelor sub presiune.

Ca și în cazul problemelor tridimensionale pentru ca problema să fie bine pusă sunt necesare condiții inițiale și de margine. Condițiile inițiale ale ecuației (11.26) au expresia:

$$\varphi(x,y,t=0) = f(x,y) \quad (11.38)$$

unde f este o funcție cunoscută pe tot domeniul de curgere, inclusiv pe frontierele acesteia.

Condițiile de tip Dirichlet în care se cunosc valorile nivelului piezometric pe o porțiune C_1 a acviferului. Acest tip de condiții, foarte comode din punct de vedere matematic, apar în cazul unui contact perfect al acviferului cu apele de suprafață (râuri, lacuri). În acest caz se impun în acvifer nivelele din râu.

Condițiile de tip Neumann în care se cunosc valorile debitelor pe o porțiune C_2 a acviferului, având formula:

$$Q|_{C_1} = -T \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_1} = f(x, y, t)$$

unde $f(x, y, t)$ este o funcție cunoscută, iar n este direcția normalei exterioare la suprafața C_2 a acviferului.

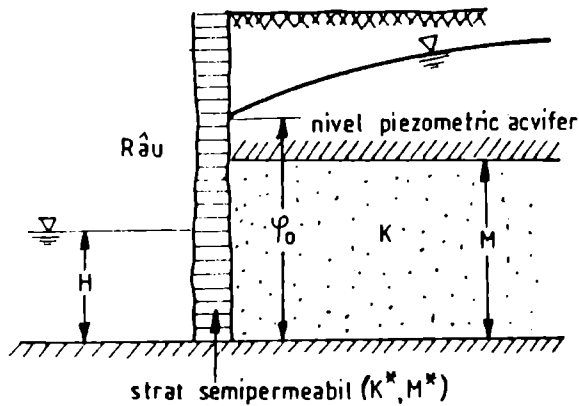


Figura 11.10: Efectul colmatării la descărcarea unui acvifer

Condiții mixte de tip Cauchy – Fourier. Exemplul tipic în care se impun astfel de condiții este cazul contactului imperfect dintre acvifer și apele de suprafață. Aceste contacte imperfecte sunt datorate colmatării acviferului cu fracțiunea fină a sedimentelor transportate de râu. Se formează astfel un strat semipermeabil subțire, de grosime M^* și conductivitate K^* care determină o diferență între sarcina piezometrică φ_0 din acvifer și nivelul H din râu (Figura 11.10).

Fie $T = M^*/K^*$ drenanța stratului impermeabil. Continuitatea componentei normale a debitului implică atunci:

$$K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\varphi|_{x=0} - H}{\sigma'} \quad (11.39)$$

Acest rezultat este valabil și în cazul în care normala exterioară nu este orientată după direcția x . Dacă notăm cu \bar{n} versorul normalei exterioare la limita C , râu – acvifer, atunci continuitatea componentei normale a debitelor specifice conduce la:

$$-(Kgrad\varphi) \cdot \bar{n} = \frac{H - \varphi}{\sigma} \Big|_C \quad (11.40)$$

sau înmulțit cu M , grosimea acviferului:

$$-T \frac{\partial \varphi}{\partial n} = M \frac{H - \varphi}{\sigma} \Big|_C \quad (11.41)$$

sau:

$$Q = M \frac{H - \varphi}{\sigma} \Big|_C \quad (11.42)$$

unde Q este debitul drenat.

Avem atunci o condiție mixtă caracterizată printr-o relație dintre debit și sarcina piezometrică la limita acviferului.

12. APLICATIILE IPOTEZEI DUPUIT

12.1. Acvifer sub presiune

Să considerăm un acvifer sub presiune, având transmisivitate variabilă, $T(x)$. Cunoscând valoarea sarcinii hidraulice în două puncte, situate la distanța L ne propunem să determinăm ecuația nivelului piezometric precum și debitele care circulă în acvifer.

(Figura 12.1).

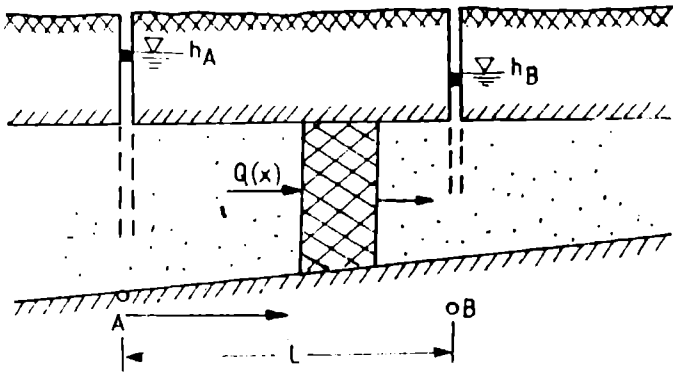


Figura 12.1: Acvifer sub presiune

Tinând seama de caracterul monodimensional al problemei, ecuația de mișcare (11.26) are atunci forma simplificată:

$$\frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{dh}{dx} \right] = 0 \quad (12.1)$$

În definitiv avem de rezolvat o problemă Dirichlet, condițiile la limite fiind:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad h = h_A \\ x = L & \quad h = h_B \end{aligned} \quad (12.2)$$

Integrând ecuația (12.1), obținem:

$$T(x) \frac{dh}{dx} = C_1 \quad (12.3)$$

Constanta C_1 va fi determinată din condițiile de margine. Integrând ecuația (12.3), între $x = 0$ și un punct oarecare x obținem:

$$C_1 \int_b^x \frac{dx}{T(x)} = \int_{h_A}^h dx = h(x) - h_A \quad (12.4)$$

În cazul în care $x=L$, atunci $h(x)=h_B$ relația precedentă conduce la:

$$C_1 \int_b^L \frac{dx}{T(x)} = h_B - h_A \quad (12.5)$$

și deci:

$$C_1 = \frac{h_B - h_A}{\int_b^L \frac{dx}{T(x)}} \quad (12.6)$$

Inlocuind constanta C_1 în relația (12.4), obținem ecuația care descrie distribuția sarcinii piezometrice în orice punct situat între marginile O și L ale domeniului:

$$h(x) = h_A + (h_B - h_A) \frac{\int_b^x \frac{dx}{T(x)}}{\int_b^L \frac{dx}{T(x)}} \quad (12.7)$$

In cazul unui mediu omogen, $T(x) = T_0 = \text{constant}$, ecuația precedentă devine:

$$h(x) = h_A + (h_B - h_A) \frac{x}{L} \quad (12.8)$$

După cum se observă, într-un mediu omogen și izotrop, sarcina piezometrică variază linear și este independentă de transmisivitate. Debitul care circulă prin acvifer are expresia:

$$Q = C_1 = T(x) \frac{dh}{dx} = C_1 \quad (12.9)$$

Inlocuind constanta C_1 din ecuația (12.6) avem:

$$Q = \frac{h_B - h_A}{\int_a^b \frac{dx}{T(x)}} \quad (12.10)$$

Este deci suficient să cunoaștem distribuția transmisivității și obținem imediat valoarea debitelor. Astfel, pentru un mediu omogen, $T(x) = T_0 = \text{constant}$ și ecuația precedentă devine:

$$Q = T_0 \frac{h_B - h_A}{L} \quad (12.11)$$

Regăsim astfel rezultatul experienței Darcy exins la scara acviferului.

12.2. Acvifer sub presiune cu drenanță verticală.

Vom considera (*figura 12.2.*) un sistem acvifer alcătuit din:

- un acvifer inferior, omogen și izotrop de transmisivitate T ;
- un acvitar omogen și izotrop de grosime M^* și conductivitate K^* ;
- un acvifer superior, omogen și izotrop, având nivelul constant h_0 , independent de variațiile de nivel din acviferul inferior.

Bilanțul masic pe un volum de control elementar are expresia:

$$Q(x) - \left[Q(x) + \frac{dQ}{dx} dx \right] + \omega dx = 0$$

(12.12)

sau
$$-\frac{dQ}{dx} + \omega = 0$$

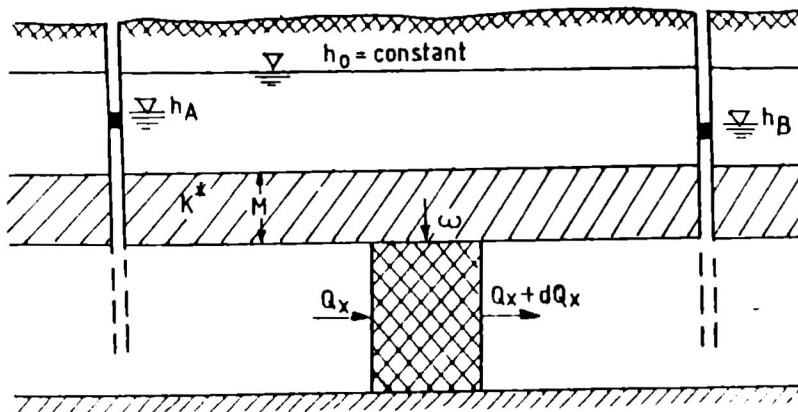


Figura 12.2: Acvifer sub presiune cu drenanță verticală.

În relația de mai sus Q reprezintă debitele care circulă prin acviferul inferior, dat, iar ω reprezintă debitele specifice provenite prin alimentarea prin drenanță și sunt datorate diferenței de sarcină dintre cele două acvifere. Cum mișcarea apei prin acvifer este esențial verticală, avem atunci, conform legii Darcy:

$$\omega = K \cdot \frac{h(x) - h_0}{M}$$

(12.13)

Introducând în ecuația de continuitate (12.12) avem:

$$\frac{d}{dx} \left(T \frac{dh}{dx} \right) + \frac{K}{M} [h_0 - h(x)] = 0$$

(12.14)

sau, ținând seama de omogenitatea acviferului:

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad h(x) = -\frac{1}{\lambda^2} h_0 \quad (12.15)$$

unde am notat cu $\lambda^2 = (K^*/M^*T) [L^2]$, factorul de drenanță.

Soluția generală a ecuației diferențiale lineare neomogene (12.15) este dată de soluția generală a ecuației omogene la care se adaugă o soluție particulară a ecuației neomogene.

După cum se observă h_0 este soluția particulară căutată și atunci soluția generală a ecuației (12.15) este:

$$h(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) + h_0 \quad (12.16)$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile de margine:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad h(x) &= h_A = C_1 + C_2 \\ x = L \quad h(x) &= h_B = C_1 \exp\left(-\frac{L}{\lambda}\right) + C_2 \exp\left(\frac{L}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (12.17)$$

Rezolvând sistemul obținem valorile constantelor C_1 și C_2 , care înlocuite în relația (12.16) conduc la expresia sarcinii hidraulice:

$$h(x) = h_0 + \frac{1}{sh \frac{x}{\lambda}} \left[(h_0 - h_A) sh \frac{L-x}{\lambda} + (h_B - h_0) sh \frac{x}{\lambda} \right] \quad (12.18)$$

Debitele pot fi calculate cu lege Darcy, dar obținem mai ușor expresia lor ținând seama de extinderea infinită a acviferului. Atunci, pentru $x \rightarrow \infty$, drenanța se anulează și avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h = h_0 \quad (12.19)$$

Deasemeni $C_2 = 0$ deoarece sarcina hidraulică nu poate avea decât valori finite. În consecință constantele de integrare devin:

$$\begin{aligned} C_1 &= h_1 - h_0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12.20)$$

Înlocuind în relația (12.16) obținem pentru sarcina piezometrică:

$$h(x) = h_0 + (h_A - h_0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (12.21)$$

Conform legii Darcy și luând în considerație și relația de mai sus obținem pentru debite:

$$Q = -T \frac{dh}{dx} = \frac{T}{\lambda} (h_A - h_0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{T}{\lambda} [h(x) - h_0] \quad (12.22)$$

După cum se observă, factorul de drenanță λ are rolul unei lungimi echivalente și anume este lungimea unui acvifer de lungime finită prin care ar circula aceleași debite ca și în cazul acviferului cu drenanță, de lungime infinită.

12.3. Acvifer freatic stratificat.

a. Stratificație orizontală.

Să considerăm un acvifer alcătuit din două strate horizontale având conductivitățile K_1 și K_2 .

Stratul inferior are grosimea finită, M , iar în stratul superior curgerea este cu nivel liber. (Figura 12.3). Conform schematizării Dupuit sarcina piezometrică este constantă pe verticală, pe toată grosimea

lamei de apă, inclusiv la cotele acestuia unde are valorile h_0 , respectiv h_L . În consecință acviferul poate fi echivalat și în acest caz cu un tub suflare de curent, iar debitul total este suma debitelor care circulă în cele două strate.

$$Q = -K_1 M \frac{dh}{dx} - K_2 (h - M) \frac{dh}{dx} \quad (12.23)$$

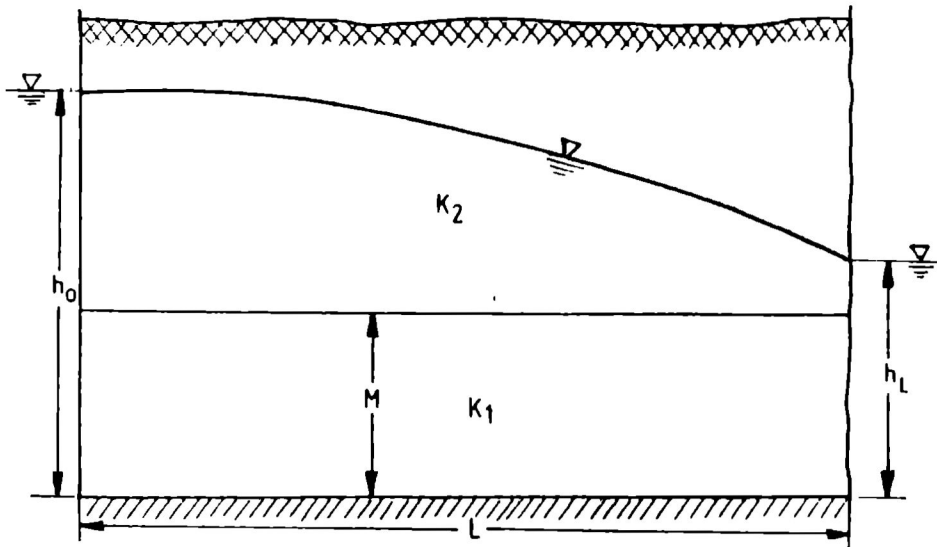


Figura 12.3: Acvifer cu stratificație orizontală.

Integrând pe toată lungimea de curgere, avem:

$$\int_0^L Q dx = -K_1 M \int_{h_0}^{h_L} dh - K_2 \int_{h_0}^{h_L} (h - M) dh \quad (12.24)$$

obținând în final expresia debitelor:

$$Q = K_1 M \frac{h_0 - h_L}{L} + \frac{K_2}{2L} [(h_0 - M)^2 - (h_L - M)^2] \quad (12.25)$$

Relația precedentă arată că acviferul stratificat poate fi echivalat cu suprafața a două acvifere: un acvifer omogen, sub presiune de transmisivitate $T=K_1M$ și un acvifer freatic, având culcușul la cota $z=M$.

Dacă în relația (12.24) integrăm între $x=0$ și un punct oarecare x , obținem ecuația suprafeței libere:

$$Qx = -k_2 M [h(x) - h_0] - k_1 M [h(x) - h_0] - k_1 M \frac{h^2(x) - h_0^2}{2} \quad (12.26)$$

b. Stratificație verticală.

Vom considera un acvifer freatic neomogen, alcătuit din două subdomenii având conductivitățile K_1 și respectiv K_2 . Fie L_1 și respectiv L_2 (Figura 12.4) lungimile celor două tronșoane.

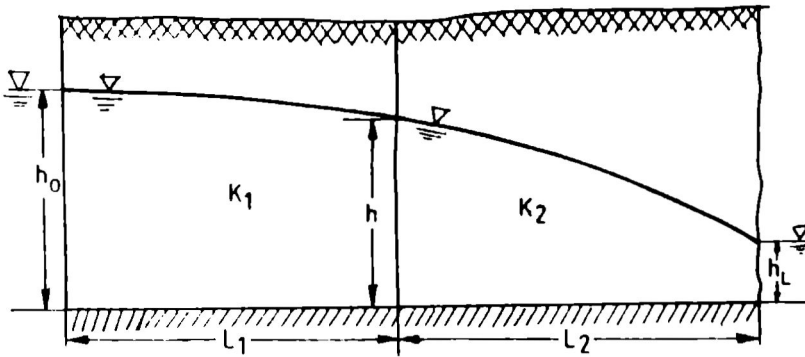


Figura 12.4: Acvifer cu stratificație verticală.

În condițiile valabilității ipotezei Dupuit, debitele în fiecare tronșon sunt date de formula Dupuit - Forchheimer (11.13). Atunci, dacă h este nivelul comun la limita de separație, continuitatea debitelor implică:

$$Q = \frac{k_1}{2L_1} (h_0 - h^2) \quad 0 < x \leq L_1, \quad (12.27)$$

și respectiv:

$$Q = \frac{k_2}{2L_2} (h^2 - h_L^2) \quad L_1 < x \leq L_2 \quad (12.28)$$

Eliminând pe h din cele două ecuații obținem expresia debitelor:

$$Q = \frac{h_0 - h_L^2}{2 \left[\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} \right]} \quad (12.29)$$

După cum se observă relația (12.29) este o generalizare a formulei Dupuit - Forchheimer în care conductivitatea este dată de valoarea ei echivalentă pentru un sistem de două tronsoane verticale conform formulei (7.***). Atunci rezultatul obținut poate fi generalizat pentru n strate:

$$Q = \frac{h_0 - h_L^2}{2 \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i}} \quad (12.30)$$

Pentru determinarea ecuației suprafeței libere vom considera tronsonul al doilea. Dacă aplicăm formula Dupuit -Forchheimer pentru un punct situat la distanța x avem:

$$Q = \frac{h(x) - h_{L_1}^2}{2k(x - L_1)} \quad (12.31)$$

Particularizând pentru $x=L$, obținem valoarea sarcinii piezometrice la contactul dintre cele două tronsoane în funcție de h_L :

$$h_{L1} = h_2^2 + \frac{2Q(L - L_1)}{k_2} \quad (12.32)$$

Inlocuind pe h_{L1} în (12.31) și ținând seama și de expresia (12.29) a debitelor obținem în final pentru suprafața liberă:

$$h^2(x) = h_2^2 + \frac{h_0^2 - h_L^2}{k_2 \left(\frac{L_2}{k_2} + \frac{L_1}{k_2} \right)} (L - x) \quad (12.33)$$

12.4. Acvifer cu nivel liber alimentat din precipitații.

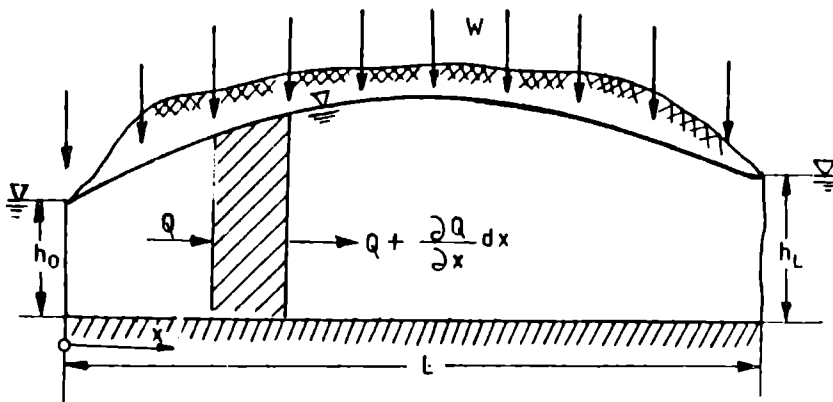


Figura 12.5: Bilanțul masic într-un acvifer cu nivel liber alimentat din precipitații.

În cazul unui acvifer freatic, alimentat prin precipitații (Figura 12.5) având debitul specific W bilanțul masic corespunzător unui volum de control conduce la următoarea expresie:

$$-\frac{dQ}{dx} + W = 0 \quad (12.34)$$

sau, ținând seama de legea Darcy:

$$\frac{d}{dx} \left(kh \frac{dh}{dx} \right) + W = 0 \quad (12.35)$$

Deși este o ecuație nelineară, ecuația precedentă se integrează ușor, prin separarea variabilelor și obținem:

$$\frac{kh^2}{2} + \frac{Wx^2}{2} + C_1x + C_2 = 0 \quad (12.36)$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile de margine:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad h = h_0 \\ x = L & \quad h = h_L \end{aligned} \quad (12.37)$$

Expresiile lor sunt:

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{kh_0^2}{2} \\ C_1 &= -\frac{k}{2L} (h_L^2 - h_0^2) - \frac{W^2}{2} \end{aligned} \quad (12.38)$$

După înlocuirea valorilor constantelor în relația (12.36) obținem ecuația suprafeței

libere care este o parabolă:

$$k \left[h(x)^2 - h_0^2 \right] - \omega x(L - x) + k \frac{x}{L} (h_0^2 - h_L^2) = 0 \quad (12.39)$$

Debitele care circulă în acvifer se obțin integrând ecuația (12.34). Avem:

$$Q(x) = Wx + C_1 \quad (12.40)$$

sau, înlocuind pe C_1 cu valoarea sa din (12.38):

$$Q(x) = W \left(\frac{L}{2} - x \right) - \frac{k}{2L} (h_0^2 - h_L^2) \quad (12.41)$$

După cum se observă, debitele sunt variabile pe orizontală. Aceasta se datorează alimentării continue din suprafață cu debitele specifice W , ceea ce face ca acviferul să nu mai poată fi considerat un tub de curent.

Abscisa punctului de maxim al suprafeței libere se obține din condiția $dh/dx = 0$ din (12.39) sau din condiția $Q = 0$ din (12.41):

$$x \Big|_{h_{\max}} = \frac{L}{2} - \frac{k}{2WL} (h_0^2 - h_L^2) \quad (12.42)$$

Din acest punct pornește o linie de cumpănă, MN (*Figura 12.6*) care separă cele două direcții de curgere, spre cele două zone de drenaj AB și CD . Valorile debitelor drenate se obțin ușor, din condițiile $x=0$, respectiv $x=L$ din ecuația debitelor (12.41):

$$\begin{aligned} Q \Big|_{x=0} &= -\frac{WL}{2} + \frac{k}{2L} (h_0^2 - h_L^2) \\ Q \Big|_{x=L} &= -\frac{WL}{2} + \frac{k}{2L} (h_0^2 - h_L^2) \end{aligned} \quad (12.43)$$

Trebuie subliniat faptul că, în zona liniei de cumpănă, ipoteza Dupuit nu mai este valabilă. Așa cum se prezintă în *figura 12.6*, liniile de curent sunt mai degrabă verticale decât orizontale cum ar trebui să fie în cazul în care ipoteza Dupuit ar fi respectată. Deasemenea în zona de drenaj suprafața liberă reală diferă de parabola Dupuit dată de ecuația (12.39).

După cum am menționat drenajul este caracterizat prin zone de izvorâre (*Figura 12.6*). Acestea fac ca debitele calculate în condițiile schematizării Dupuit să fie corecte, chiar dacă panta suprafeței libere diferă de cea reală. *Figura 12.7* schițează zona de valabilitate ale ipotezei Dupuit într-un acvifer cu nivel liber: ea se află în zona centrală a domeniului; în dreptul unei limite verticale impermeabile sau în zonele de deșeușare aproximarea suprafeței libere cu parabola dată de (12.39) nu mai este corectă.

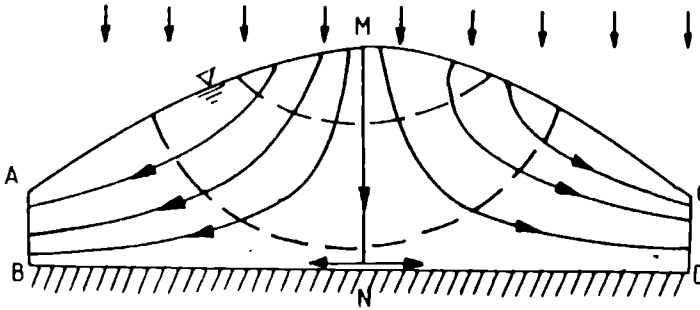


Figura 12.6: Spectrul hidrodinamic în vecinătatea liniei de cumpănă.

12.5. Acvifer cu nivel liber cu drenanță verticală.

Fie un acvifer freatic alimentat din precipitații dar în care o parte din apă se descarcă prin drenanță verticală prin intermediul unui acvitară alimentând un alt acvifer cu nivel liber. (*Figura 12.7*). Vom considera un acvifer freatic care se efilează, lungimea zonei de drenanță fiind L . În acest caz ecuația de bilanț pe volumul de control (12.35) se modifică:

$$-\frac{dQ}{dx} - q(x) = \omega \quad (12.44)$$

unde debitele descărcate prin drenanță au expresia:

$$q = k \cdot \frac{h + M^*}{M^*} = \frac{h + M^*}{\sigma} \quad (12.45)$$

În relația de mai sus am notat prin:

- K^* și M^* : conductivitatea respectiv grosimea acvitarului;
- $\sigma = M^* / K^*$: coeficientul de drenanță al acvitarului;

Tinând seama de legea Darcy, ecuația (12.44) capătă forma

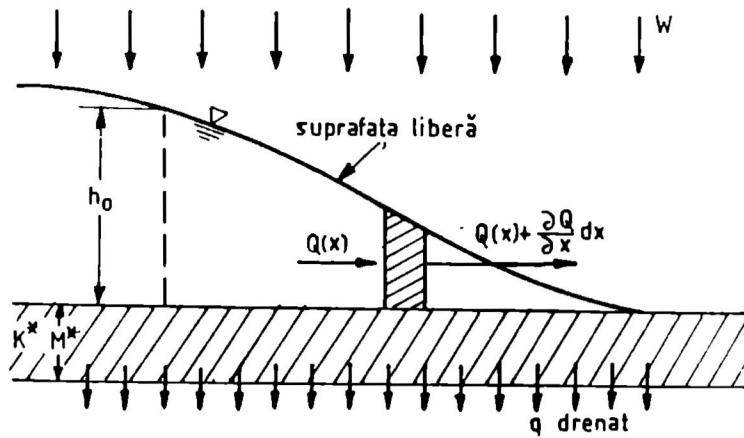


Figura 12.7: Bilanțul masic în cazul unui acvifer cu nivel liber și drenanță verticală.

$$k \frac{d^2 h^2}{dx^2} + W = \frac{h + M^*}{\sigma} = 0 \quad (12.46)$$

sau:

$$\frac{d^2 h^2}{dx^2} - 2\Delta h - 2B = 0 \quad (12.47)$$

unde am notat cu:

$$A = -\frac{1}{k\sigma}; \quad B = \frac{M' - \omega\sigma}{k\sigma}$$

Înmulțind ecuația (12.47) cu $h \frac{dh}{dx}$ obținem:

$$2 \left(h \frac{dh}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(h \frac{dh}{dx} \right) - 2Ah \left(h \frac{dh}{dx} \right) - 2Bh \frac{dh}{dx} = 0 \quad (12.48)$$

Ca și în cazul precedent ecuația de mișcare (12.47) este tot o ecuație nelineară. Pentru a o integra vom înmulți ambii membri ai ecuației (12.47) cu hdh/dx . Obținem succesiv:

$$\frac{d}{dx} \left(h \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{2}{3} A \frac{dh^3}{dx} - B \frac{dh^2}{dx} = 0 \quad (12.49)$$

și

$$\left(h \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{2}{3} Ah^3 + Bh^2 + C \quad (12.50)$$

Dacă L este abscisa punctului în care acviferul se efilează, atunci în acest punct avem $h=0$ și implicit $C=0$. Ecuația (12.50) revine la:

$$\frac{dh}{dx} = \left(-\frac{2}{3} Ah + B \right)^{1/2} \quad (12.51)$$

care, integrată prin separarea variabilelor conduce la:

$$x + C = -\frac{3}{A} \left(\frac{2}{3} Ah + B \right)^{1/2} \quad (12.52)$$

Pentru determinarea constantei C este necesară o condiție suplimentară, la limită. Fie h_0 nivelul piezometric în punctul $x=0$. Atunci:

$$C = -\frac{3}{A} \left(\frac{2}{3} Ah_0 + B \right)^{1/2} \quad (12.53)$$

Introducând în (12.52) obținem ecuația suprafeței libere:

$$h(x) = h_0 + \frac{Ax^2}{6} - \frac{3}{A} \left(\frac{2}{3} Ah_0 + B \right)^{1/2} \quad (12.54)$$

După cum se observă, integrarea ecuației neliniare a comportat în acest caz o serie întreagă de artificii. De aceea în cazul în care fluctuațiile nivelului piezometric sunt mici este preferabil să linearizăm ecuația de mișcare (12.46) prin introducerea unei transmisivități medii $T=Kh$. Avem atunci:

$$T \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{h+B}{\sigma} + \omega = 0 \quad (12.55)$$

sau:

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{h+B}{\lambda^2} + \frac{\omega}{T} = 0 \quad (12.56)$$

unde am notat cu $\lambda^2 = T\sigma$, factorul de drenanță al acvitarului.

Se obține astfel o ecuație lineară în h . Urmând același procedeu ca în cazul unui acvifer sub presiune, cu drenanță (ecuațiile 12.14 și 12.15) obținem o soluție asemănătoare cu (12.16):

$$h = B + C_1 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\omega\lambda^2}{T} \quad (12.57)$$

Constantele C_1 și C_2 se pot determina din condiții la limite, de tipul:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad h = h_0 \\ x = L & \quad h = h_L \end{aligned} \quad (12.58)$$

12.6. Puț perfect într-un acvifer sub presiune.

Un puț perfect interceptează acviferul pe toată grosimea acestuia. Să considerăm atunci, (Figura 12.8) un acvifer cu extinderea infinită, având transmisivitatea T . Înainte de extragerea prin pompare a unui debit constant Q , nivelul piezometric este constant având valoarea H , pe toată suprafața domeniului.

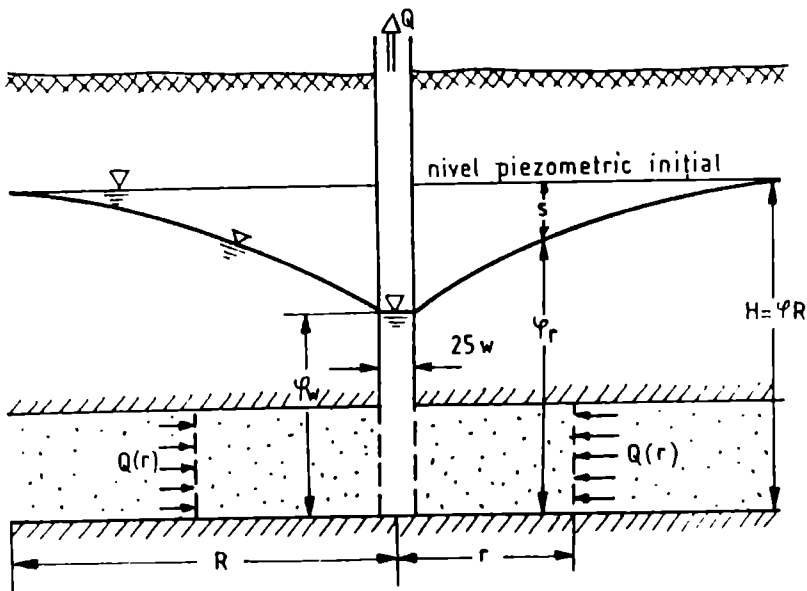


Figura 12.8: Denivelarea în jurul unui puț perfect deschis într-un acvifer sub presiune.

Din momentul extragerii debitului Q , apare o denivelare s , sarcina piezometrică φ prezentând variații spațiale pe toată suprafața domeniului. În sistemul de coordonate cilindrice și în regim permanent mișcarea apei subterane este descrisă de ecuația (9.***) pe care o vom rescrie pentru comoditatea expunerii:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (12.59)$$

Deoarece curgerea este axial simetrică sarcina piezometrică este independentă de unghiul θ . Deasemeni, conform schematizării Dupuit, sarcina piezometrică este independentă și de cota z . În consecință curgerea este axial simetrică, atât nivelul φ cât și denivelarea s fiind funcții doar de raza r . Ecuația precedentă se simplifică atunci, reducându-se doar la primul termen:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = 0 \quad (12.60)$$

Separând variabilele, această ecuație se integrează ușor având soluția:

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2 \quad (12.61)$$

Pentru determinarea constantei C_2 trebuie cunoscută sarcina piezometrică într-un punct oarecare. Fie R , raza la care sarcina piezometrică rămâne practic nemodificată. Deci pentru $r=R$ avem $\varphi = H$. Înlocuind în relația precedentă, obținem pentru C_2 :

$$C_2 = H - C_1 \ln R \quad (12.62)$$

Pe de altă parte debitul care traversează suprafața cilindrică de rază r și grosime M , permit determinarea constantei C_1 :

$$Q = 2\pi T_r \frac{d\varphi}{dr} = 2\pi T \frac{C_1}{R} \quad (12.63)$$

$$C_1 = \frac{Q}{2\pi T}$$

Introducând această valoare în relația (12.62) obținem pentru constanta C_2 :

$$C_2 = H - \frac{Q}{2\pi T} \ln R \quad (12.64)$$

După înlocuirea constantelor C_1 și C_2 în relația (12.61) obținem expresia denivelării într-un puț perfect în funcție de debitele extrase:

$$\varphi - H = S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{R} \quad (12.65)$$

Conform relației precedente calculul denivelării într-un punct oarecare necesită cunoașterea razei de influență a puțului. Putem însă calcula sarcina piezometrică într-un punct oarecare situat la distanță r_2 de axul puțului în funcție de sarcina piezometrică într-un punct situat la distanță r_1 . Fie atunci φ_1 și respectiv φ_2 cele două nivele piezometrice. Scăzând expresiile (12.65) obținute pentru fiecare din ele rezultă relația Theim între sarcinile piezometrice sau denivelările în două puncte oarecare:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = S_2 - S_1 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{R} \quad (12.66)$$

Deasemeni sarcinile piezometrice într-un punct pot fi calculate și fără a cunoaște debitele extrase Q . Pentru aceasta să notăm cu φ_w nivelul piezometric măsurat la o distanță egală cu raza puțului r_w . Relația (12.65) devine:

$$\varphi_w - H = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_w}{R} \quad (12.67)$$

Împărțind ecuațiile (12.65) și (12.67) obținem:

$$\varphi(r) - \varphi_w = (H - \varphi_w) \frac{\ln(r / r_w)}{\ln(R / r_w)} \quad (12.68)$$

După cum se observă odată cunoscute sarcinile piezometrice la distanțe egale cu raza puțului, respectiv cu raza de influență este posibilă determinarea sarcinei piezometrice în orice alt punct fără să cunoaștem debitele extrase și transmisivitatea acviferului.

12.7. Puț într-un acvifer cu nivel liber.

În condițiile valabilității schematizării Dupuit, curgerea în jurul unui puț care deschide un acvifer freatic până la culcușul acestuia este tot radial simetrică (Figura 12.9).

Fie atunci h cota suprafeți libere, create în urma extragerii debitelor Q . Pentru un punct situat la distanța r de axul puțului avem:

$$Q = 2\pi r h k \frac{dh}{dr} \quad (12.69)$$

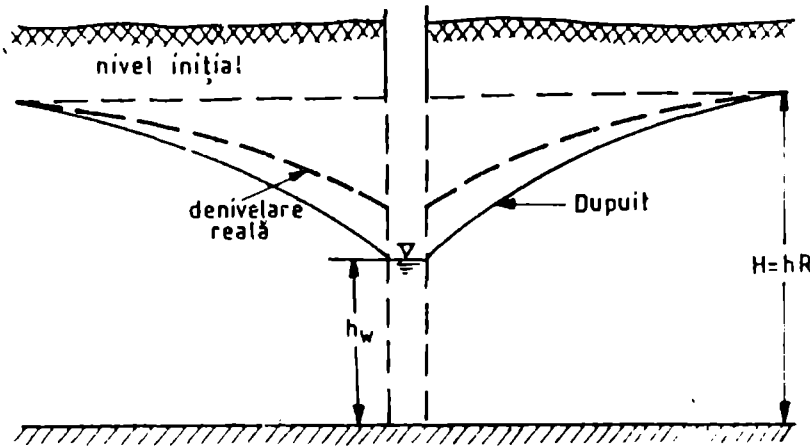


Figura 12.9: Denivelarea în jurul unui puț perfect deschis într-un acvifer freatic.

Integrând pe tot domeniul de alimentare, cuprins între raza r_w a puțului și raza de alimentare R a acestuia, avem:

$$Q \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi k \int_{h_0}^H h dh \quad (12.70)$$

sau:

$$Q \ln \frac{R}{r_0} = \pi k (H^2 - h_0^2) \quad (12.71)$$

În relațiile de mai sus am notat cu h_w și H nivelele corespunzătoare razei r_w a puțului și respectiv, razei de alimentare R a acestuia.

Spre deosebire de cazul puțului deschis într-un acvifer sub presiune, debitele extrase de un puț într-un acvifer cu nivel liber depind de pătratul sarcinii piezometrice. Pentru cazul unei denivelări mici comparativ cu înălțimea lamei de apă ($h \approx H$) relația de mai sus poate fi linearizată introducând noțiunea de transmisivitate echivalentă, $T=Kh$. Aproximația se mai sus implică atunci și:

$$H + h \approx 2H \quad (12.72)$$

iar expresia (12.71) a debitelor devine:

$$Q = \frac{2\pi Ts}{\ln \frac{R}{r}} \quad (12.73)$$

unde am notat cu s denivelarea într-un punct situat la distanța r de axul puțului. După cum se observă, introducând noțiunea de transmisivitate echivalentă debitele extrase de un puț într-un acvifer cu nivel liber au expresia formal identică cu debitele extrase dintr-un acvifer sub presiune. Echivalența poate fi extinsă și în cazul diferenței dintre denivelările dintre două puncte, obținând o relație analoagă *ecuației Theim*. Fie atunci două puncte situate la distanțele r_1 și r_2 pentru care nivelele sunt h_1 și h_2 . Înlocuind pe h_w și H din (12.71) cu h_1 și h_2 avem:

$$h_2^2 - h_1^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (12.74)$$

și:

$$(H - S_2)^2 - (H - S_1)^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (12.75)$$

După dezvoltarea expresiei (12.75) și notând cu $s^* = s - s^2/2H$, denivelarea corectată obținem o relație analogă ecuației Theim:

$$S_1^* - S_2^* = \frac{Q}{2\pi k} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (12.76)$$

13. SPECTRUL HIDRODINAMIC.

13.1. Potențialul vitezelor.

Să considerăm un mediu omogen și izotrop în condițiile unei probleme plan - orizontale, și fie funcția:

$$\Phi = K\varphi \quad (13.1)$$

Avem:

$$\text{grad}\phi = \varphi\text{grad}K + K\text{grad}\varphi = q \quad (13.2)$$

Câmpul vitezelor q derivă deci dintr-un potențial scalar Φ . Funcția $\Phi(x,y)$ poartă numele de *potențial al vitezelor*, iar curbele de egal potențial ($\Phi = \text{constant}$) se numesc *linii echipotențiale*. Conform relației (13.2) vitezele q într-un punct sunt orientate în lungul normalei la liniile echipotențiale. Cum liniile de curent sunt tangente vitezelor, implicit ele sunt ortogonale pe liniile de curent. Aceste două familii de curbe (echipotențialele și liniile de curent) descriu în mod sugestiv mișcarea fluidului în tot domeniul

Noțiunea de potențial al vitezelor a fost extinsă și în cazul mediului neomogen, iar curbele de egal nivel piezometric se numesc tot *linii echipotențiale*. Conform legii Darcy, în cazul mediului neomogen dar izotrop, liniile de curent sunt tangente la direcțiile gradientului și implicit sunt ortogonale pe echipotențiale.

În consecință într-un mediu heterogen și izotrop echipotențialele și liniile de curent alcătuiesc din două familii de curbe ortonormale, iar într-un mediu neomogen și anizotrop cele două familii de curbe se intersectează sub un unghi diferit de 90° .

13.2. Funcția de curent.

Deoarece în regim permanent, ecuația de continuitate are forma $\text{div}q = 0$, atunci câmpul vitezelor derivă dintr-un potențial vector $A (A_x, A_y, A_z)$, astfel încât avem:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0 \quad (13.3)$$

În condițiile schematizării Dupuit, mișcarea este întotdeauna plan - orizontală ($q_z = 0$) și avem:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ q_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ q_z &= 0 = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (13.4)$$

Ultima ecuație are ca soluție posibilă soluția banală $A_x = A_y = 0$, caz în care primele două ecuații(13.4) se reduc la :

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ q_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (13.5)$$

Există deci întotdeauna o funcție de două variabile $A_z = \Psi(x, y)$ astfel încât derivatele ei să fie componentele vitezelor Darcy:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ q_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (13.6)$$

Funcția $\Psi(x, y)$ se numește *funcție de curent* și are următoarele proprietăți:

1. Este o diferențială totală exactă. Introducând componentele (13.6) ale vitezelor în ecuația de continuitate avem:

$$\operatorname{div} \bar{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (13.7)$$

și:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \quad (13.8)$$

ceea ce revine la:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \quad (13.9)$$

2. Funcția de curent este constantă în lungul unei linii de curent. Într-adevăr, pornind de la ecuația liniilor de curent pentru o problemă de curgere bidimensională, obținem succesiv:

$$\frac{dx}{q_x} = \frac{dy}{q_y} \quad (13.10)$$

și:

$$q_x dy - q_y dx = 0 \quad (13.11)$$

și ținând seama de (13.6) pentru componentele vitezelor:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0 \quad (13.12)$$

sau:

$$\Psi = \text{constant} \quad (13.13)$$

Pentru a stabili semnificația fizică a constanței din relația precedentă vom considera un tub de curent delimitat de două linii de curent oarecare pentru care funcția de curent are valorile Ψ_1 și respectiv Ψ_2 . În volumul de control *ACBD* (Figura 13.1) în care masa se conservă avem, în absența surselor:

$$\int_{ACB} \vec{q} \cdot n dS = \int_{ADB} \vec{q} \cdot n dS \quad (13.15)$$

Rezultă că integrala fluxului între două linii de curent este independentă de drumul parcurs și depinde doar de pozițiile relative ale punctelor de integrare.

Atunci debitul total care străbate o suprafață oarecare AB are expresia :

$$Q = \int_A^B \vec{q} \cdot d\vec{S} = \int_A^B q_x dy - q_y dx \quad (13.16)$$

sau, ținând seama de expresiile (13.6) ale componentelor q_x și q_y ale fluxului specific:

$$Q = \int_A^B \vec{q} \cdot d\vec{S} = \int_A^B -\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = -\int_A^B d\Psi = \Psi_1 - \Psi_2 \quad (13.17)$$

Deci diferența $\Psi_1 - \Psi_2$ dintre valorile funcției de curent care mărginesc un tub de curent reprezintă valoarea debitului care străbate acel tub.

În condițiile valabilității schematizării Dupuit, cele două familii de curbe de egal potențial φ , respectiv de funcție constantă de curent Ψ caracterizează univoc mișcarea apei într-un acvifer în sensul că permit cunoașterea atât a sarcinei piezometrice cât și a debitelor care străbat acviferul în orice zonă a acestuia. Cele două familii de curbe alcătuiesc spectrul hidrodinamic al curgerii în acviferul respectiv.

3. Între derivatele funcției de curent Ψ și ale potențialului există relațiile Cauchy – Riemann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (13.18)$$

Aceste relații se obțin imediat egalând componentele debitului specific dat de ecuațiile (13.2) și (13.6). Rezultă că și funcția de curent satisface ecuația Laplace. Într-adevăr derivând ecuațiile precedente în funcție de x și respectiv y și ținând seama de (13.8) obținem în final:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (13.19)$$

În condițiile problemei bidimensionale cele două familii de curbe de egal potențial φ , respectiv de funcție constantă de curent Ψ determină univoc curgerea în sensul că pentru un domeniu dat aceste două familii de curbe sunt unice și alcătuiesc *spectrul hidrodinamic* al mișcării apei subterane în acviferul respectiv.

Spectrul hidrodinamic caracterizează complet hidrodinamica acviferului deoarece determină atât distribuția sarcinii piezometrice cât și a debitelor în orice punct al acestuia.

De remarcat că pentru o problemă dată este suficientă doar determinarea uneia dintre cele două funcții. Să presupunem de exemplu că se cunoaște distribuția potențialului q pe tot domeniu. Atunci introducând relațiile Cauchy – Riemann în expresia (13.9) a diferențialei funcției de curent obținem:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx$$

și deci putem obține distribuția lui Ψ în lungul oricărei curbe:

$$\Psi = \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx \right)$$

Analog, introducând relațiile Cauchy – Riemann în expresia diferențialei totale φ obținem:

$$\varphi = \int \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} dx - \frac{\partial\Psi}{\partial x} dy \right) \quad (13.20)$$

4. Într-un mediu neomogen dar izotrop spectrul hidrodinamic este alcătuit din două familii de curbe ortonormale.

Pentru aceasta să notăm cu ds (dx, dy) lungimea de arc a unei echipotențiale și cu dS (dX, dY) lungimea de arc a unei linii de curent. Cum în lungul unei echipotențiale $\varphi = \text{const}$, avem:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0 \quad (13.21)$$

Elementul dS al liniei de curent este definit prin:

$$\frac{dX}{q_x} = \frac{dY}{q_y} \quad (13.22)$$

sau , înlocuind componentele fluxului în funcție de derivatele sarcinii piezometrice, conform legii Darcy:

$$\frac{dX}{K \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dY}{K \frac{\partial \varphi}{\partial y}} \quad (13.23)$$

Eliminând $\partial \varphi / \partial x$ și $\partial \varphi / \partial y$ din relațiile (13.18) și (13.20) obținem relația de ortogonalitate dintre componentele celor două arce:

$$dx dX + dy dY = 0 \quad (13.24)$$

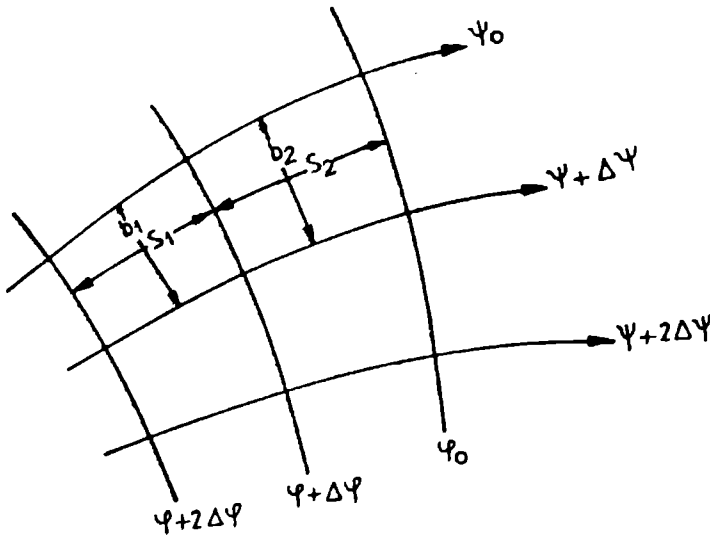


Figura 13.2

În general spectrul hidrodinamic se construiește cu pași egali $\Delta\varphi$, respectiv $\Delta\Psi$ între izolinii: pornind atunci de la valori cunoscute (spre exemplu o echipotențială de pe contur, sau o limită impermeabilă luată ca referință, $\Psi = 0$) se poate construi din aproape în aproape întreg spectrul. Să considerăm atunci o zonă din spectrul hidrodinamic caracteristic unui acvifer neomogen dar izotrop și să notăm cu s_1 distanțele medii dintre echipotențiale, respectiv cu b_1 distanțele medii dintre liniile de curent (Figura 13.2). Continuitatea debitelor pe un tub conduce atunci la relația:

$$Q = K_1 b_1 \frac{\Delta\varphi}{s_1} = K_2 b_2 \frac{\Delta\varphi}{s_2} \quad (13.25)$$

Această relație permite extrapolarea conductivităților (sau a transmisivităților) în lungul unui tub de curent, cunoscând valoarea într-un singur ochi.

13.3. Potențialul complex

Se consideră o funcție w de variabilă complexă $z=x+iy$ ale cărei componente sunt φ și Ψ avem deci:

$$w = \varphi + i\Psi \quad (13.26)$$

Deoarece atât componenta reală cât și cea imaginară satisfac ecuația lui Laplace, funcția w satisface și ea ecuația lui Laplace:

$$\Delta w = \Delta\varphi + i\Delta\Psi = 0 \quad (13.27)$$

Derivând funcția w avem:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (13.28)$$

sau ținând seama de ecuațiile Cauchy Riemann (13.18)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi}{\partial y} = q_x - iq_y \quad (13.29)$$

Funcția $W = \frac{dw}{dz}$ este denumită *viteză complexă*, deoarece părțile ei reale și imaginare sunt componentele debitelor specifice. Funcția w prin derivarea căreia s-a obținut viteza complexă este *potențialul complex* al curgerii. Potențialul complex determină deci univoc spectrul hidrodinamic. Aceasta a permis analiza mișcării apei subterane în plan complex prin rezolvarea ecuației Laplace (13.27) obținând apoi spectrul hidrodinamic prin separarea părților reale de imagine.

Metoda prezintă avantajul utilizării transformărilor conforme ceea ce a permis analiza unor probleme cu geometrie complicată, inclusiv a determinării poziției suprafeței libere.

Dezavantajul constă în faptul că metoda este aplicabilă doar problemelor bidimensionale și în regim permanent. Chiar și în acest caz eficacitatea metodei este limitată de dificultățile legate de separarea părților reale și imaginare ale soluției ecuației Laplace. Dezvoltate puternic până în anii '60, interesul pentru aceste metode a scăzut odată cu introducerea simulării matematice.

Vom prezenta în continuare două exemple simple pentru a ilustra posibilitățile potențialului complex.

1. Curgerea uniformă într-un acvifer infinit

Vom considera un acvifer omogen și izotrop extins în tot planul XOY . Mișcarea apei subterane este uniformă și caracterizată prin debitul specific constant q , orientat în lungul axei OX .

Soluția ecuației Laplace este atunci:

$$w = qz = q(x + iy) \quad (13.30)$$

iar viteza complexă este:

$$W = \frac{dw}{dz} = q = ct. \quad (13.31)$$

Echipotențialele sunt date de partea reală a funcției W și au deci expresia:

$$\varphi = qx \quad (13.32)$$

Funcția de curent reprezintă partea imaginară a funcției w având formula:

$$\Psi = qy \quad (13.33)$$

Spectrul hidrodinamic este dat de două familii de drepte perpendiculare: echipotențialele paralele cu axa Oy , respectiv liniile de curent paralele cu axa Ox .

2. Puț perfect într-un acvifer infinit

În capitolul 12 am dedus sarcina piezometrică în jurul unui puț de rază r_w deschis într-un acvifer sub presiune, de transmisivitate unitară. Conform relației (12. 65) avem:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_w} \quad (13.34)$$

Liniile de curent sunt orientate pe direcția razelor ce converg în foraje. Dacă θ este unghiul făcut de raza corespunzătoare punctului $M(r, \theta)$ atunci ecuația funcției de curent este:

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (13.35)$$

Se observă că diferența dintre liniile $\Psi(\theta=2\pi)$ și $\varphi(\theta=0)$ corespund debitului Q .

Ținând seama de faptul că $z=re^{i\theta}$ potențialul complex al puțului într-un acvifer omogen și izotrop de transmisivitate neunitară este:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta) + \text{const} \quad (13.36)$$

Rezultatul poate fi ușor generalizat pentru un mediu omogen de transmisivitate T :

$$W = \frac{Q}{2\pi T} \ln z + \text{const} \quad (13.37)$$

13.4. Relații între caracteristicile spectrului și structura geologică

Să considerăm pentru exemplificare un câmp quasiuniform, în care vitezele sunt paralele dar au valori diferite.

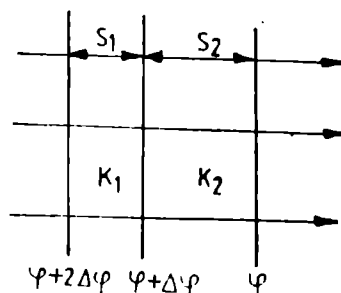


Figura 13.3: Spectrul hidrodinamic la contactul a doua zone cu conductivități diferite.

Spectrul hidrodinamic este alcătuit atunci din două familii de drepte și perpendiculare. Cum tuburile de curent sunt orizontale avem atunci $h_1 = h_2$ și realția (13.22) se reduce la:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{i_2}{i_1} \quad (13.38)$$

unde prin i_1 și i_2 am notat valorile medii ale gradientului în cele două ochiuri. Rezultă deci că gradientul hidraulic variază invers proporțional cu conductivitatea: zonele în care echipotențialele sunt mai dense (gradient mare) caracterizează o zonă micșorare a conductivității, pe când o zonă puternic conductoare este caracterizată printr-un gradient scăzut

Această observație sugerează că poate exista o corespondență între elementele structurale și spectrul hidrodinamic în măsura în care acestea generează un contrast de conductivitate. Trebuie însă subliniat că această corespondență nu este univocă: diferite elemente structurale pot conduce la aceeași configurație a spectrului.

Vom prezenta în continuare o serie de exemple fără a avea pretenția că am epuizat toate cazurile posibile.

i Efectul falilor.

În schema din *figura 13.4* cele două falii pun în contact un bloc conductor cu două blocuri mai puțin conductoare. Conform celor arătate anterior, transmisivitatea mare a blocului central conduce la o micșorare a gradientului

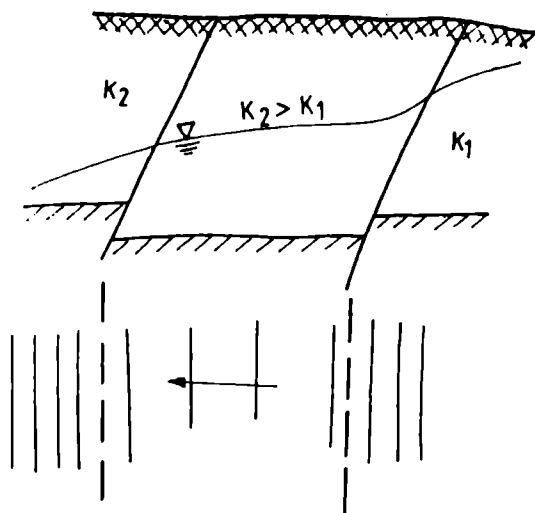


Figura 13.4: Echipotnețiale în zona falilor

(echipotențiale mai rare) față de blocurile adiacente, în care densitatea echipotențialelor este cu atât mai mare cu cât contrastul de conductivitate față de blocul central este mai mare. Invers, dacă blocul ridicat ar fi fost mai puțin conductor, proprietățile sale ar fi fost reflectate prin densitatea mai mare a echipotențialelor din zona centrală.

Dacă o falie practic impermeabilă pune în contact două blocuri conductoare liniile echipotențiale vor fi perpendiculare pe falie, densitatea lor fiind însă diferită în cele două blocuri în funcție de transmisivitățile acestora. Deasemeni liniile de curent sunt paralele cu falia, ea însă fiind și o linie de curent.

... sau
sistemele industriale) este caracterizată printr- un maxim al suprafeței potențiale: echipotențialele se închid în jurul zonei de alimentare care generează un maxim. La rândul lor liniile de curent diverg din interiorul acestui maxim, intersectându-se în puncte singulare (*Figura 13.5.a*). Zonele de minim caracterizează un drenaj local, fie el natural, unde acviferul este în contact cu apele de suprafață (mlaștină, lac, etc) sau artificial, când acviferul este drenat prin sisteme de puturi , drenuri continui, etc. Ca și în cazul maximelor , echipotențialele se închid în jurul minimului, iar liniile de curent converg către acest minim intersectându-se într-unul sau mai multe puncte singulare din interiorul acestuia. (*Figura 13.5.b*).

Trebuie subliniat că aceste zone de alimentare sau drenaj nu aparțin propriu-zis domeniului de mișcare: chiar dacă sunt interioare ele aparțin deci conturului acviferului și sunt descrise prin condiții de

tip Neumann (flux impus cunoscut). Așa cum am arătat același efect poate fi datorat unor cauze diferite. Astfel, maximele sau minimele nu sunt cauzate numai de surse vizibile, cum sunt apele de suprafață sau drenajul artificial. Ele pot fi datorate alimentării sau descărcării locale a acviferului prin drenanță de către sau în acvifere adiacente.

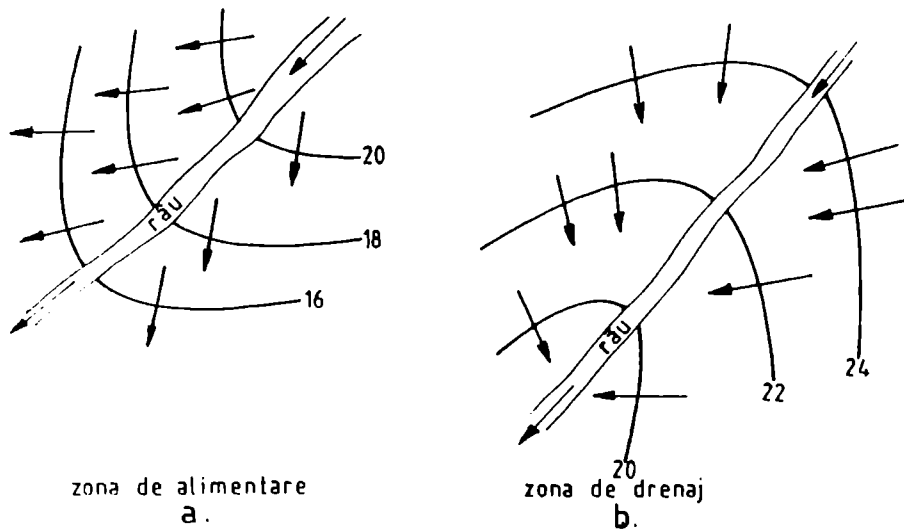


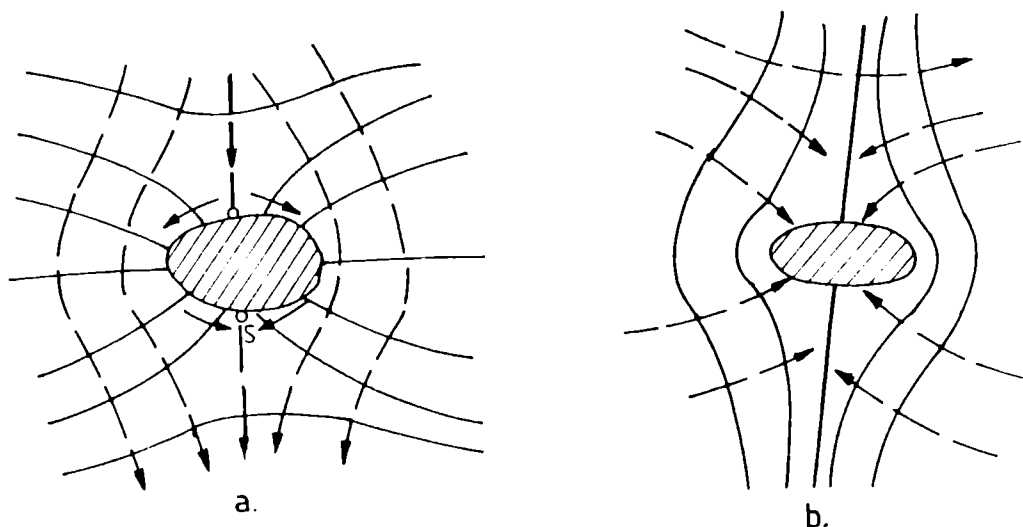
Figura 13.6: Echipotențialele în vecinătatea unui râu

În regim permanent unele schimbări de pantă ale echipotențialelor indică legături ale acviferului cu râuri caracterizate prin valori maxime în cazul alimentării apelor subterane de către cele de suprafață (Figura 13.6 a) sau prin minime în cazul drenajului (Figura 13.6 b). De remarcat faptul că râul nu este caracterizat nici printr-o echipotențială și nici printr-o linie de curent.

3. Zone cu contrast puternic de conductivitate.

Să considerăm o lentilă practic impermeabilă în interiorul unui acvifer. Ea este caracterizată printr-o condiție de tip Neumann (flux nul: $\partial \phi / \partial n = 0$) pe totconturul (Figura 13.7.a). În consecință liniile de curent ocolesc lentila, sunt congruente cu aceasta, urmărind conturul ei. În general toate liniile de curent își păstrează continuitatea în timpul ocolirii lentilei. Există o sigură linie de curent care se "înterupe" în punctele S și S' : acestea sunt puncte de stagnare în care viteza se anulează. De remarcat faptul că în aceste puncte are loc o divergență a liniilor de curent (punctul S , în zona amonte a lentilei)

sau convergența acestora (punctul S' , în zona aval a lentilei), fără însă ca în aceste puncte sarcina piezometrică să atingă valori extreme. Mai precis continuitatea echipotențialelor este întreruptă de lentila impermeabilă, aceasta neaparținând domeniului de curgere.



*Figura 13.7: Efectul contrastului de conductivitate
a: Lentile impermeabile; b: Lentile puternic conductoare.*

Spre deosebire de lentilele impermeabile, lentilele cu conductivitate foarte mare față de zonele adiacente aparțin domeniului de mișcare. Datorită transmisivității mari pierderea de sarcină în timpul traversării lentilei este neglijabilă astfel încât conturul lentilei se comportă practic ca o echipotențială (Figura 13.7.b). Atunci echipotențialele urmăresc conturul lentilei. Linia de curent AB prezintă caracteristicile unei linii de cumpănă, care separă curgerea prin și în jurul lentilei în două domenii distincte: într-o parte a lentilei are loc convergența liniilor de curent iar în cealaltă parte a acesteia liniile de curent diverg, fără însă ca debitele să prezinte o discontinuitate. Se spune că lentila conductoare are caracter de pseudo sursă: spectrul ei prezintă analogii cu cele ale unei surse (de alimentare sau drenaj) fără însă ca debitele să prezinte o discontinuitate.

Același aspect îl prezintă spectrul hidrodinamic și în vecinătatea brațelor de râu îngropate.

4. Linii de cumpănă.

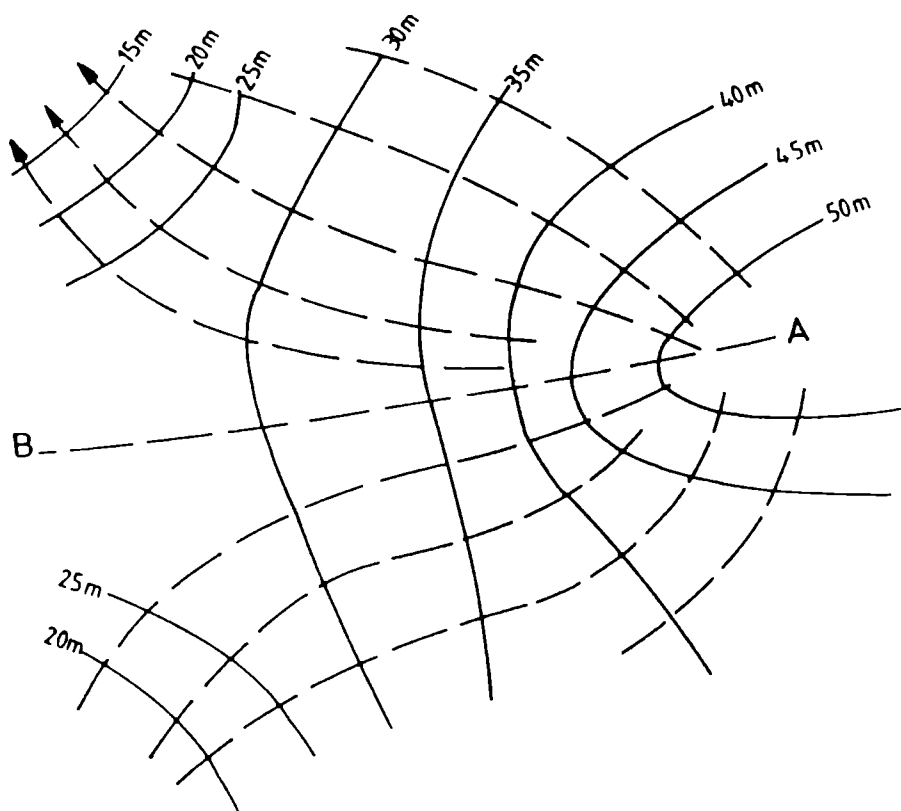


Figura 13.8: Spectrul hidrodinamic în vecinătatea unei linii de cumpănă

Figura 13.8 prezintă o zonă dintr-o hartă hidrogeologică. Ea este caracterizată printr-o zonă de alimentare, închisă de echipotențiala de 50m și două zone de descărcare. Linia de curent AB care separă cele două domenii de curgere, alimentare - descărcare se numește linie de cumpănă. Ea este linia pentru care funcția de curent Ψ capătă valoarea de referință, cu alte cuvinte în regim permanent linia de cumpănă are ecuația $\Psi=0$. Spre deosebire de cazul descris anterior, al lentilei conductoare linia de cumpănă este intersectată de liniile echipotențiale.

De remarcat faptul că, spre deosebire de apele de suprafață, pentru apele subterane, în regim nepermanent poziția liniei de cumpănă variază în timp.

13.5. Relații de echivalență între spectrele hidrodinamice în medii izotrope și anizotrope

Construcția spectrului hidrodinamic reprezintă în fapt o tehnică de rezolvare grafică a ecuației de mișcare a apei subterane. În cazul mediilor izotrope operația este mai simplă datorită ortonormalității celor două familii de curbe. În cazul mediilor anizotrope însă, operația este îngreunată mult de refracția continuă a liniilor de curent care evident nu mai sunt perpendiculare pe echipotențiale

Deasemeni utilizarea metodelor analitice este mult mai dificilă pentru soluționarea problemelor în medii anizotrope datorită caracterului tensorial al conductivității.

Se poate demonstra că orice problemă de mișcare într-un mediu anizotrop poate fi rezolvată într-un mediu izotrop echivalent. Aceasta implică stabilirea unor relații de transformare a geometriei domeniului, ale condițiilor de margine, ale parametrilor de material, etc. Ne propunem deci să echivalăm mișcarea într-un mediu anizotrop, care reprezintă domeniul prototip într-un mediu izotrop care constituie domeniul model echivalent. Vom folosi indicele p pentru prototip, respectiv indicele e pentru toți parametrii din domeniul model echivalent.

Tehnica de echivalare implică etapele următoare:

1. Se scriu toate ecuațiile care intervin în descrierea mișcării pentru cele două domenii.

Să considerăm un acvifer sub presiune și avem atunci:

• Ecuații de mișcare

Prototip:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \left(K_{xp} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p} \right) + \frac{\partial}{\partial y_p} \left(K_{yp} \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_p} \right) = S_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial t} \quad (13.39)$$

Model:

$$\frac{\partial}{\partial x_e} \left(K_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_e} \right) + \frac{\partial}{\partial y_e} \left(K_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial y_e} \right) = S_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial t} \quad (13.40)$$

• Viteze

Prototip:

$$v_{xp} = -\frac{K_{xp}}{n_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}$$

$$v_{yp} = -\frac{K_{yp}}{n_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_p}$$
(13.41)

Model:

$$v_{xe} = -\frac{K_e}{n_e} \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_e}$$

$$v_{ye} = -\frac{K_e}{n_e} \frac{\partial \varphi_e}{\partial y_e}$$
(13.42)

- Debite:

Prototip:

$$Q_p = n_p \frac{dx_p dy_p dz_p}{dt_p}$$
(13.43)

Model:

$$Q_e = n_e \frac{dx_e dy_e dz_e}{dt_e}$$
(13.44)

2. Se scriu rapoartele dintre toate variabilele de pe prototip și de pe model. Notăm cu indicele r aceste rapoarte. Avem:

- Parametrii de stare:

sarcini piezometrice: $\varphi_r = \varphi_e / \varphi_p$;

debit: $Q_r = Q_e / Q_p$;

viteze: $V_{xr} = V_{xe} / V_{xp}$; $V_{yr} = V_{ye} / V_{yp}$; $V_{zr} = V_{ze} / V_{zp}$;

- Parametrii de material:

Conductivități: $K_{xr} = K_e / K_{xp}$; $K_{yr} = K_e / K_{yp}$; $K_{zr} = K_e / K_{zp}$; (13.45)

Imagazinări: $S_r = S_e / S_p$;

Porozități: $n_r = n_e / n_p$;

3. Se exprimă toate mărimile de pe model în funcție de cele de pe prototip în funcție de rapoartele de echivalență:

- Parametrii de stare:

sarcini piezometrice: $\varphi_e = \varphi_r \varphi_r$

debite: $Q_e = Q_r Q_r$

viteze: $V_{xe} = V_{xp} V_{xr}; V_{ye} = V_{yp} V_{yr}$

• Parametrii de material:

Conductivități: $K_e = K_{xr} K_{xp} = K_{yr} K_{yp}$ (13.46)

Inmagazinări: $S_e = S_r S_p;$

Porozități: $n_e = n_r n_p;$

• Dimensiuni:

lungimi: $x_e = x_r x_p; y_e = y_r y_p$

timp: $t_e = t_r t_p;$

Prin intermediul rapoartelor adimensionale se exprimă toate mărimile din ecuația domeniului model în funcție de mărimile corespunzătoare domeniului prototip. Ecuațiile (13.39) și (13.41) devin atunci:

$$\frac{K_{xr}}{x_r} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(K_{xp} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p} \right) + \frac{K_{yr}}{y_r} \frac{\partial}{\partial y_p} \left(K_{yp} \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_p} \right) = S_r \frac{\varphi_r}{t_r} S_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial t_p} \quad (13.47)$$

și respectiv:

$$V_{xr} V_{xp} = - \frac{K_{xr} \varphi_r}{n_r x_r} \frac{K_{xp}}{n_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p} \quad (13.48)$$

și o altă ecuație analogă pentru componenta pe direcția y a vitezei.

4. Stabilirea relațiilor între rapoartele de echivalență încât cele două sisteme de ecuații care descriu mișcarea prototipului să fie formal identice.

Astfel pentru ca cele două ecuațiile de mișcare pentru prototip (13.41), respectiv (13.48) să fie identice este necesară existența egalităților :

$$\frac{K_{xr}}{x_r} \varphi_r = \frac{K_{yr}}{y_r} \varphi_r \quad (13.49)$$

Deasemeni, identitatea tuturor componentelor vitezelor pentru prototip exprimate de către ecuațiile (13.41) și respectiv (13.48) implică următoarele relații între rapoartele de echivalență:

$$V_{xr} = \frac{K_{xr}\varphi_r}{n_r x_r} \quad (13.50)$$

$$V_{yr} = \frac{K_{yr}\varphi_r}{n_r y_r}$$

În final obținem din relațiile (13.43) pentru identitatea debitelor:

$$Q_r t_r = n_r x_r y_r z_r \quad (13.51)$$

5. Determinarea relațiilor dintre parametrii modelului și cei ai prototipului.

În exemplul prezentat avem 13 rapoarte de echivalență: K_{xr} , K_{yr} , K_{zr} , n_r , S_r , x_r , y_r , z_r , t_r , V_{xr} , V_{yr} , V_{zr} , Q_r , φ_r și numai 10 relații de echivalență, date de ecuațiile (13.47) - (13.50). Vom alege atunci arbitrar un număr de rapoarte de echivalență unitare (în cazul de față 4), cu alte cuvinte mărimile respective sunt identice pentru prototip și model. Spre exemplu dacă alegem

$$Q_r = \varphi_r = t_r = n_r = 1 \quad (13.52)$$

obținem:

$$K_e = \left(K_{xp} K_{yp} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_r = \left(\frac{K_{xr}}{n_r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.53)$$

$$y_r = \left(\frac{K_{yr}}{n_r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

După cum se observă conductivitatea echivalentă este egală cu media geometrică a componentelor principale ale conductivității mediului anizotrop. Această relație este valabilă doar cu respectarea strictă a egalității (13.52), și poate fi ușor generalizată pentru o problemă tridimensională. Avem atunci:

$$K_e = \left(K_x K_y K_z \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.54)$$

În acest fel prototipul, un mediu anizotrop, a fost transformat într-un model izotrop. De remarcat faptul că transformarea se referă nu doar la parametrii de material (conductivități, înmagazinări, porozități, etc) dar și la condiții de margine, dimensiuni ale domeniului, etc. Odată rezolvată problema pentru mediul izotrop se transformă soluția prin inversarea relațiilor (13.52)-(13.54) pentru prototip.

14. PRINCIPIUL SUPRAPUNERII EFECTELOR

În formularea dată de Newton principiul superpoziției stabilește că: “ *In cazul în care acțiunile externe pot fi adunate atunci pot fi adunate și efectele lor*”. În hidraulica subterană “ prin acțiuni externe ” se înțelege acțiunea întregului mediu exterior asupra sistemului acvifer prin intermediul interfețelor alcătuite din frontierele naturale ale acestuia. Din punct de vedere cantitativ acțiunile externe sunt caracterizate prin condițiile de margine. Principiul lui Newton poate fi atunci reformulat astfel: “ *In cazul în care condițiile de margine pot fi puse sub forma unei sume de condiții particulare atunci și soluția ecuației generale de mișcare este suma soluțiilor obținute pentru fiecare din condițiile de margine particulare*”. Valabilitatea principiului superpoziției implică nu numai linearitatea condițiilor de margine dar și a ecuației care descrie procesul. După cum am arătat numai în cazul acviferelor sub presiune mișcarea apei subterane este descrisă de o ecuație lineară. Aplicarea principiului superpoziției în cazul acviferelor cu nivel liber conduce deci la rezultate eronate.

14.1 Principiul superpoziției în cazul sistemelor acvifere.

Vom considera pentru exemplificare mișcarea apei în regim nepermanent într-un acvifer sub presiune, descris de operatorul linear și omogen:

$$L(\varphi) \equiv \operatorname{div}(T \operatorname{grad} \varphi) - S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (14.1)$$

Linearitatea este datorată faptului că operatorul L este funcție numai de potențialul φ și de derivatele sale iar omogenitatea este datorată absenței termenilor sursă. Trebuie subliniat că atât condițiile de margine, Dirichlet sau Neumann cât și condițiile inițiale sunt lineare în potențialul φ

Pentru acest tip de problemă principiul superpoziției poate fi formulat astfel:

Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sunt soluții particulare ale operatorului (14.1) atunci orice combinație lineară a acestora de forma:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i \quad (14.2)$$

este deasemenea o soluție a operatorului respectiv. Suma generală este deci suma soluțiilor particulare.

$$L(\varphi) = \sum L(C_i \varphi_i) = \sum C_i L(\varphi_i)$$

În cazul în care mișcarea apei subterane este descrisă de un operator linear dar neomogen de forma:

$$L(\varphi) \equiv \operatorname{div}(T \operatorname{grad} \varphi) - S \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \delta(x_i, y_j) Q + W = 0 \quad (14.3)$$

principiul superpoziției are următoarea formulare:

Dacă φ_0 este o soluție particulară a operatorului neomogen (14.3) și $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sunt soluții particulare ale operatorului omogen (14.1) atunci soluția operatorului neomogen are forma:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i \quad (14.4)$$

În relațiile (14.2) și (14.4) am notat cu C_i valorile unor constante arbitrare, iar cu $\delta(x_i, y_j)$ funcția Dirac. Avantajul principiului superpoziției constă în aceea că o problemă complicată în ceea ce privește condițiile inițiale sau de contur poate fi redusă la o serie de probleme mai simple. Soluția problemei constă în suprapunerea (însurarea) sarcinilor hidraulice și ale debitelor rezultate din analiza problemelor mai simple. Trebuie însă îndeplinite următoarele condiții.

1. Operatorul diferențial să fie linear. În consecință în cazul mișcării apei în acvifere cu nivel liber nu poate fi aplicat principiul superpoziției.

2. Condițiile inițiale și de margine să fie lineare. Dacă soluția problemei se poate obține prin suprapunerea soluțiilor datorate unor condiții de margine mai simple, fiecare dintre acestea trebuie să depindă numai de condiția de contur respectivă și să fie independentă de celelalte condiții.

Vom considera câteva exemple pentru clarificarea acestor afirmații:

14.2. Suprapunerea efectelor condițiilor de margine. Regim permanent.

a. Problema Dirichlet.

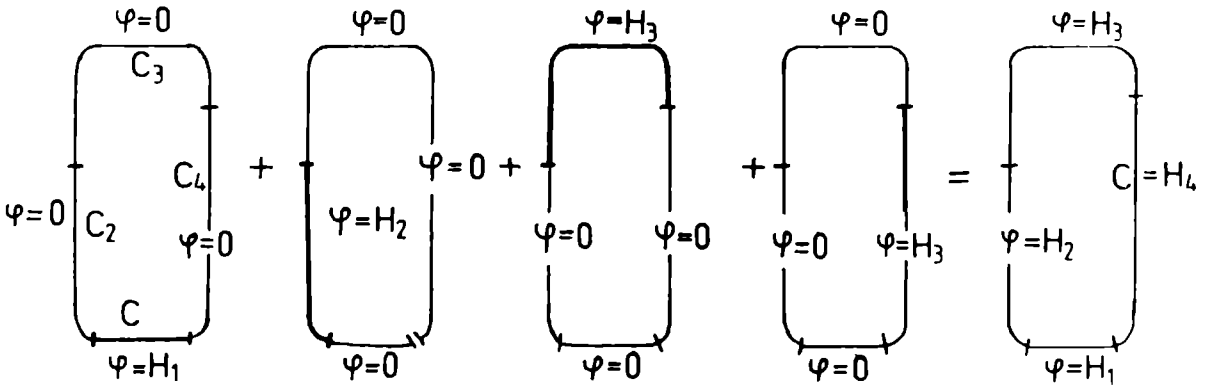


Figura 14.1: Principiul superpoziției în cazul problemei Dirichlet (după J. Bear, 1977)

Vom analiza problema apei în regim staționar, într-un mediu omogen și izotrop. În acest caz operatorul (14.1) ia forma ecuației Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (14.5)$$

Să considerăm că pe porțiunile C_1 , C_2 , C_3 și C_4 ale frontierei C avem condițiile de margine sub formă de potențiale impuse H_1 , H_2 , H_3 și H_4 (Figura 14.1) și fie φ acest potențial. Să notăm cu φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 soluțiile următoarelor probleme particulare: φ_1 satisface ecuația (14.5) pentru condițiile de margine: $\varphi_1 = H_1$ pe porțiunea C_1 a frontierei C și $\varphi_1 = 0$ pe porțiunile C_2, C_3, C_4 ale frontierei respective; φ_2 este o soluție a ecuației Laplace pentru condițiile de margine $\varphi_2 = H_2$ pe porțiunea C_2 a frontierei C și $\varphi_2 = 0$ pe porțiunile H_1, H_3, H_4 , etc.

În acest caz avem:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \quad (14.6)$$

Să observăm că relația (14.6) este un caz particular al formulei (14.2) a principiului superpoziției în care constantele $C_i = 1$.

Toate condițiile impuse anterior sunt respectate: ecuația de mișcare este lineară, iar condițiile de margine sunt independente. Aceasta face, de exemplu, ca soluția φ_3 să fie doar funcție de condițiile de margine H_3 și independentă de condițiile de margine pe celelalte porțiuni de frontieră.

b. Problema Neumann.

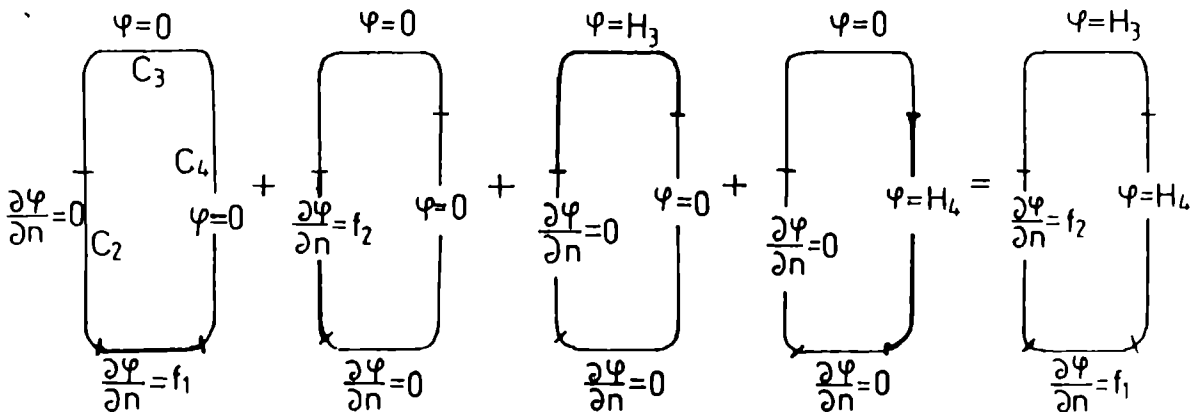


Figura 14.2: Principiul superpoziției în cazul problemei Neumann (după J. Bear, 1977)

Vom relua exemplul precedent, considerând însă că pe porțiunile C_1 și C_2 cunoaștem gradientul sarcinii pe direcția normalei la frontieră având expresiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_1} &= f_1(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_2} &= f_2(x, y) \end{aligned} \quad (14.7)$$

Pe porțiunea C_3 și C_4 se păstrează condițiile de margine de tip Dirichlet: $\varphi|_{C_3} = H_3$, și respectiv

$$\varphi|_{C_4} = H_4.$$

Soluția generală a problemei se obține prin însumarea soluțiilor particulare $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ale ecuației Laplace pentru următoarele condiții de margine (Figura 14.2).

- φ_1 este soluția operatorului (14.5) pentru $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_C = f_1(x, y)$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_G = 0$, $\varphi_1 \Big|_C = 0$ și $\varphi_1 \Big|_G = 0$

- φ_2 verifică ecuația Laplace pentru $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_C = 0$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_G = f_2(x, y)$, $\varphi_2 \Big|_C = 0$, $\varphi_2 \Big|_G = 0$

- φ_3 este soluție a ecuației Laplace pentru condițiile de margine $\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \Big|_C = \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = 0$, $\varphi_3 \Big|_C = H_1$,

$\varphi_3 \Big|_G = 0$

și analog:

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \Big|_C = \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \Big|_G = 0, \varphi_4 \Big|_C = 0 \text{ și } \varphi_4 \Big|_G = H_4$$

Soluția problemei va fi atunci:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

c. Efectul puțurilor.

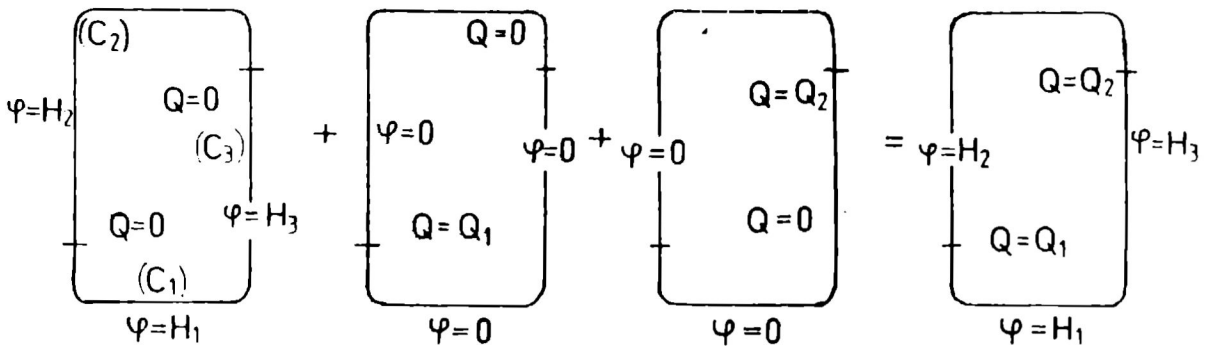


Figura 14.3: Principiul superpoziției în cazul unui sistem de puțuri. (după J. Bear, 1977)

În același acvifer omogen și izotrop vom considera două puțuri de extracție P_1 și P_2 având debitele Q_1 și Q_2 . Condițiile de contur sunt de tip Dirichlet $\varphi|_{C_1} = H_1$ respectiv $\varphi|_{C_2} = H_2$ (Figura 14.3).

Soluția generală a problemei se obține prin suprapunerea soluțiilor particulare φ_1 , φ_2 , φ_3 .

φ_1 corespunde soluției fără puțuri; la rândul ei această soluție se obține prin superpoziționarea a două soluții mai simple în care condițiile de contur sunt: $\varphi|_{C_1} = H_1$ și $\varphi|_{C_2} = 0$ respectiv $\varphi|_{C_1} = 0$ și

$$\varphi|_{C_2} = H_2;$$

φ_2 corespunde situației în care în puțul P_1 avem $Q = Q_1$ iar în puțul P_2 debitul extras este nul.

$Q_2 = 0$. Condițiile de margine sunt: $\varphi|_{C_1} = \varphi|_{C_2} = 0$

φ_3 corespunde situației în care $Q_1 = 0$ și în puțul P_2 se extrage debitul $Q = Q_2$. Condițiile de margine sunt aceleași ca cele de la punctul precedent: $\varphi|_{C_1} = \varphi|_{C_2} = 0$

Pentru ca să poată fi aplicat principiul superpoziției trebuie ca puțurile să fie suficient de depărtate de frontieră pentru ca denivelările create să nu afecteze potențialul de pe contur.

În toate aceste trei cazuri analizate au fost îndeplinite cele două condiții enunțate în paragraful 14.1:

- ecuația de mișcare lineată

- condițiile de margine pot fi puse sub formă de sume. Soluția generală este atunci suma soluțiilor particulare obținute pentru fiecare din termenii sumei care alcătuiesc condiția de contur generală.

14.3. Regimul nestaționar de mișcare

a. *Condițiile de contur constante în timp.*

Fie un acvifer sub presiune omogen și izotrop în care mișcarea apei subterane este descrisă de ecuația:

$$T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + w(x, y, t) = S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (14.8)$$

Condițiile inițiale sunt:

$$\varphi(x, y, t=0) = f(x, y) \quad x, y \in D \quad (14.9)$$

iar condițiile de margine sunt de tipul Dirichlet

$$\varphi(x, y)|_C = g(x, y) \quad (14.10)$$

unde prin C am notat frontiera domeniului D a acviferului. Se observă că termenul care imprimă caracterul nepermanent al problemei îl constituie debitul W de alimentare din suprafață.

Soluția generală poate fi obținută prin suprapunerea a două soluții particulare: φ_1 -și φ_2

Prima soluție φ_1 neglijează debitul de alimentare pe verticală, și revine la rezolvarea următoarei probleme: Să se rezolve ecuația:

$$T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (14.11)$$

în condițiile inițiale și de margine (14.9) și (14.10).

Cea de-a doua soluție φ_2 ia în considerare debitul de alimentare pe verticală dar condițiile de margine sunt de forma $\varphi(x, y)|_C = 0$. A doua soluție implică deci rezolvarea problemei: Să se rezolve ecuația (14.8) pentru condiții inițiale (14.9) și condiții de contur:

$$\varphi(x, y)|_C = 0$$

b. *Condiții de contur variabile în timp.*

Vom considera un acvifer sub presiune, omogen și izotrop a cărei mișcare este descrisă de ecuația:

$$T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (14.12)$$

Condițiile inițiale sunt:

$$\varphi(x, y, 0) = 0 \quad x, y \in \Omega \quad (14.13)$$

iar condițiile de margine sunt variabile în timp.

$$\varphi(x, y, t)|_C = g(x, y, t) \quad (14.14)$$

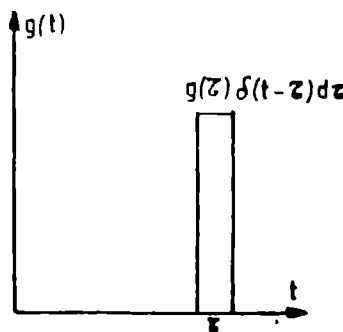
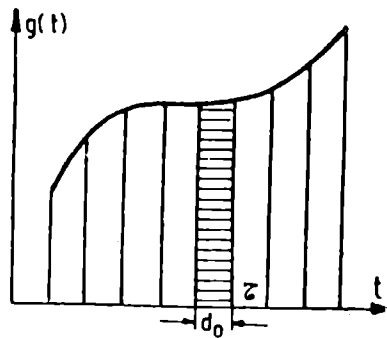


Figura 14.4: Principiul superpoziției în cazul unor condiții de margine variabile în timp.

Pentru a rezolva această problemă este necesar și suficient să cunoaștem soluția ecuației (14.12) pentru aceleași condiții inițiale (14.13) dar pentru condiții de margine de tip Dirac: $\varphi(x, y, t)|_C = \delta(t)$

Reamintim că funcția Dirac este definită de:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Vom nota cu $G(t)$ soluția ecuației (14.12) în care condițiile de margine au forma unui impuls Dirac și avem:

$$G(t) = L[\varphi = \delta(t)]$$

Vom descompune funcția $g(t)$ din condiția de margine (14.14) într-o succesiune de “coloane” având lățimea infimizezimală $d\tau$. Vom reprezenta funcția $g(t)$ ca o serie de “funcții coloană” localizate în centrul intervalului $d\tau$ (Figura 14.4) și având valori nule în orice punct al acestui interval. Avem atunci:

$$g(t) = \sum [g(\tau)d\tau]\delta(t - \tau) \quad (14.15)$$

Fiecare din termenii sumei este o soluție a operatorului linear (14.12).

$$L[g(\tau)d\tau \cdot \delta(t - \tau)] = g(\tau)d\tau \cdot L[\delta(t - \tau)] = g(\tau) \cdot G(t - \tau)d\tau$$

Atunci conform principiului superpoziției suma reprezentată de ecuația (14.15) este soluția generală a ecuației (14.12) pentru condițiile de margine (14.14). Avem deci:

$$L(\sum [g(\tau)d\tau\delta(t - \tau)]) = \sum L(g(\tau)\delta(t - \tau))d\tau = \sum g(\tau) \cdot G(t - \tau)d\tau$$

Trecând la limită pentru micșorarea intervalului $d\tau$ suma se transformă în integrală și soluția ecuației (14.12) pentru condiții de margine (14.14) devine:

$$\varphi(t) = \int g(\tau) \cdot G(t - \tau)d\tau \quad (14.16)$$

Soluția ecuației de mișcare pentru condiții de margine variabile în timp $g(t)$ reprezintă convoluția funcției $g(t)$ cu răspunsul $G(t)$ al mediului la un impuls unitar.

14.4. Aplicație. Efectul puțurilor în acvifere infinite extinse.

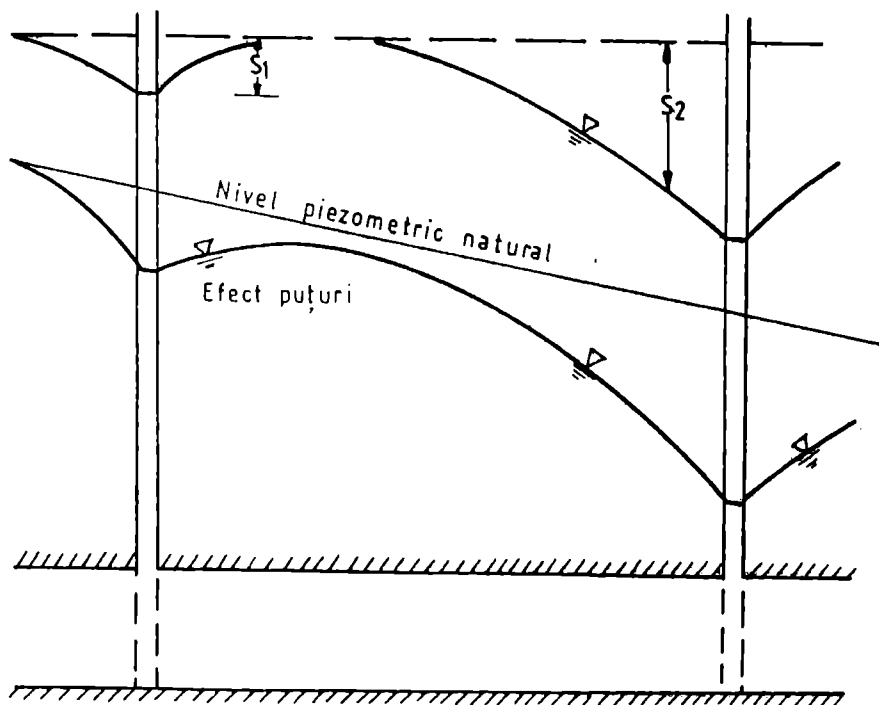


Figura 14.5: Suprapunerea denivelărilor create de mai multe puțuri.

Exemplul prezentat în paragraful 14.2b sugerează posibilitatea aplicării principiului superpoziției în calculul denivelării create de unul sau mai multe puțuri. În principal trebuie îndeplinite două condiții:

1. linearitatea ecuației de mișcare și a condițiilor de margine în sarcina hidrolică

2. amplasarea puțurilor la distanțe suficient de mari de limitele acviferului astfel încât

denivelarea impusă în puțuri să nu afecteze potențialele impuse pe contur.

Ultima condiție este îndeplinită de acvifere cu extindere foarte mare, practic infinite. Conform principiului superpoziției problema generală comportă următoarele etape:

- Calculul distribuției sarcinii piezometrice în absența puțurilor, pentru condițiile de margine impuse. În exemplul prezentat în Figura 14.5 s-a considerat un acvifer omogen și izotrop, extins la

infini caracterizat printr-o curgere uniformă. În secțiunea verticală analizată, piezometria naturală este caracterizată printr-o dreaptă înclinată a cărei pantă este gradientul hidraulic natural.

- Calculul denivelării create de fiecare puț în condițiile unui acvifer stagnant, caracterizat prin sarcina constantă $\varphi_2 = 0$.

- Determinarea efectului puțurilor prin însumarea (suprapunerea) denivelărilor calculate la distribuția potențialului în mediu neperturbat.

Pentru a exemplifica aplicarea metodei vom considera două cazuri:

a. Puț într-un acvifer uniform cu extindere infinită

Dacă vom alege sistemul de referință în punctul de amplasare al puțului soluția problemei se obține prin însumarea rezultatelor obținute în capitolul 13.

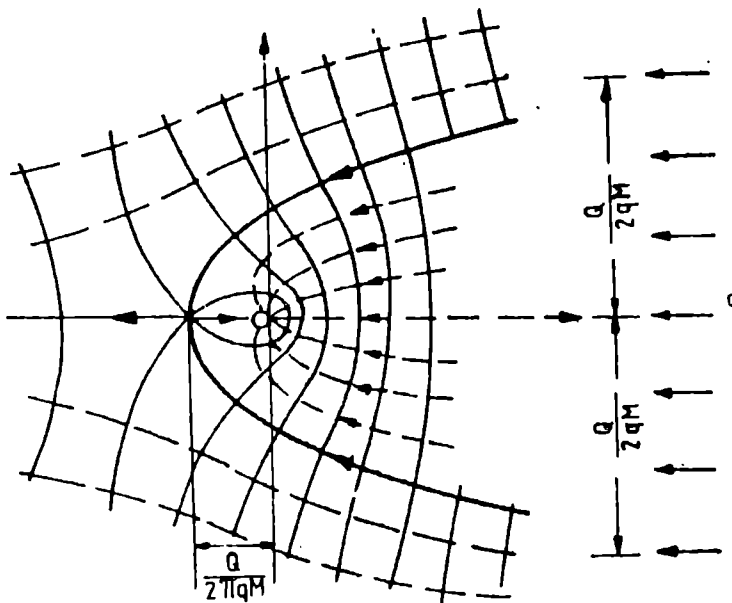


Figura 14.6: Spectrul hidrodinamic al unui puț deschis într-un acvifer uniform.

Potențialul complex are atunci formula:

$$W = \frac{Q}{2\pi T} \ln z + qz \quad (14.17)$$

Separând părțile reale și imaginare obținem spectrul hidrodinamic caracterizat prin echipotențialele:

$$\varphi = \frac{qM_x}{T} + \frac{Q}{2\pi T} \ln r = \frac{qM_x}{T} + \frac{Q}{4\pi T} \ln(x^2 + y^2) \quad (14.18)$$

unde M este grosimea stratului, respectiv funcția de curent:

$$\Psi = qy + \frac{Q}{2\pi T} \theta = qy \frac{M}{T} + \frac{Q}{2\pi T} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (14.19)$$

unde prin q am notat debitul constant din regim natural iar prin T transmisivitatea acviferului.

Spectrul hidraulic este caracterizat prin două elemente (*Figura 14.6*)

- Punctul de stagnare ale cărui coordonate se determină punând condiția ca viteza să se anuleze.

Avem:

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{qM}{T} + \frac{Q}{2\pi T} \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 \\ v_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi T} \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned} \quad (14.20)$$

Anularea componentei pe direcția y a vitezei conduce la $y = 0$, iar din prima ecuație, pentru $y = 0$ obținem:

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{Q}{2\pi T q} \\ y_s &= 0 \end{aligned} \quad (14.21)$$

Observăm din ecuația (14.19) că pentru punctul de stagnare $\theta = \pm\pi$. Obținem atunci pentru această condiție ecuația funcției de curent ce trece prin punctul de stagnare:

$$\Psi = \mu \frac{Q}{2T}$$

- Linia de cumpănă ce separă curgerea în spre puț de curgerea în regim natural. Conform definiției date în capitolul 13 ecuația ei se obține din condiția ca diferența dintre valorile funcției de curent să fie egală cu debitele captate de puț. Alegând axa OX ca funcție $\psi_1=0$, obținem ecuația liniei de cumpănă:

$$\frac{y}{x} = \mu g \left(\frac{2\pi q M y}{Q} \right) \quad (14.22)$$

Observăm că atunci când y tinde la infinit θ tinde la zero obținem pentru asimptotele liniei de cumpănă:

$$Y_c = \frac{Q}{2qM} \quad (14.23)$$

unde M este grosimea acviferului.

b. Efectul dubletului perfect

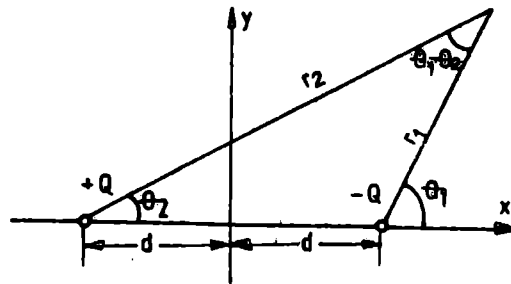


Figura 14.7: Dubletul perfect

Un dublet este alcătuit din două puțuri, dintre care unul de extracție iar celălalt de alimentare.

Dubletul este considerat perfect atunci când debitele celor două puțuri sunt egale.

Vom considera un dublet perfect în care cele două puțuri situate la distanța $2d$ sunt deschise într-un acvifer omogen și izotrop (Figura 14.7) cu extindere infinită. Puțul de alimentare este amplasat în punctul $M(-d,0)$ și generează potențialul complex:

$$W_a = \frac{Q}{2\pi T} \ln(z - d) \quad (14.24)$$

Analog, puțul de drenaj amplasat în punctul $M'(d,0)$ generează potențialul:

$$W_d = -\frac{Q}{2\pi T} \ln(z + d) \quad (14.25)$$

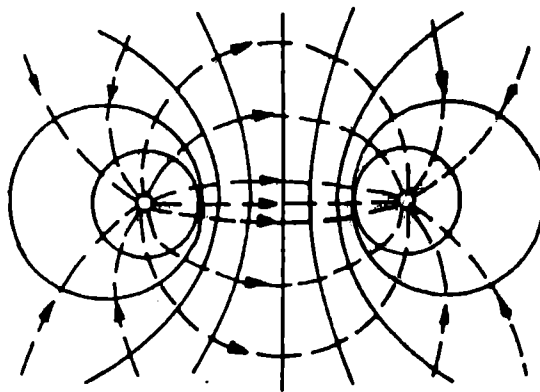


Figura 14.8: Spectrul hidrodinamic al unui dublet perfect

Prin superpoziție obținem potențialul complex al dubletului:

$$W = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{z - d}{z + d} \quad (14.26)$$

Fie punctul P situat la distanțele r_1 și r_2 de cele două puțuri. Avem atunci:

$$\begin{aligned} z - d &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z + d &= r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (14.27)$$

și potențialul complex capătă atunci forma :

$$W = \frac{Q}{2\pi T} \left[\ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (14.28)$$

Separând părțile reale și imaginare obținem componentele spectrului hidrodinamic:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_1}{r_2} \\ \Psi &= \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (14.29)$$

Ecuțiile echipotențialelor se obțin ușor dacă observăm din prima ecuație (14.29) că $\varphi = \text{constant}$ implică $\frac{r_1}{r_2} = \text{const} \tan t$. Avem atunci:

$$\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = C = \frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} \quad (14.30)$$

și apoi:

$$\left(x - d \frac{1+C}{1-C} \right)^2 + y^2 = \frac{4d^2 C}{(1-C)^2} \quad (14.31)$$

Echipotențialele sunt deci cercuri ale căror centre au coordonatele:

$$\begin{aligned}x &= d \frac{1+C}{1-C} \\y &= 0\end{aligned}\quad (14.32)$$

și razele: $\frac{2d}{1-C}\sqrt{C}$

Din ecuațiile funcțiilor de curent avem:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\Psi}{Q} = \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = C^* \quad (14.33)$$

unde C^* este o constantă.

Din *Figura 14.7a* se observă că :

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{y}{x-d} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{y}{x+d} \quad (14.34)$$

Dezvoltând ecuația precedentă obținem atunci:

$$x^2 + \left(y - \frac{d}{C^*}\right)^2 = d^2 \left(1 + \frac{1}{C^{*2}}\right) \quad (14.35)$$

Liniile de curent alcătuiesc tot o familie de cercuri având razele: $d \left(1 + \frac{1}{C^{*2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ și coordonatele centrelor:

$$x=0 \quad \text{și} \quad y = \frac{d}{C^*} \quad (14.36)$$

Cele două familii de cercuri – *cercurile lui Apolonius* – sunt prezentate în *Figura 14.8*

Trebuie subliniat că suprapunerea efectelor este valabilă numai în cazul acviferelor sub presiune unde ecuația de curgere este lineară. În cazul acviferelor cu nivel liber unde mișcarea apei subterane este

descrișă de o ecuație nelincolnă suprapunerea efectelor conduce la rezultate eronate. În practică se utilizează, uneori principiul superpoziției și în cazul acviferelor cu nivel liber. Dacă denivelările produse sunt mici comparativ cu înălțimea lamei de apă ecuația de curgere poate fi lineară, așa cum s-a arătat în capitolul 12 și erorile vor fi mici. Evident că în cazul în care ecuația de mișcare nu poate fi linearizată aplicarea principiului superpoziției duce la rezultate eronate.

14.5. Metoda imaginilor

Deși comodă din punct de vedere matematic analiza mișcării apei în jurul forajelor deschise în medii infinite au aplicații limitate. În marea majoritate a cazurilor, puțurile se află în apropierea unor limite care pun în contact acviferele cu formațiuni de conductivitate redusă (*Figura 14.9 a și b*) sau cu ape de suprafață (*Figura 14.10 a și b*). Metoda imaginilor pe care o prezentăm în acest paragraf este o aplicație a principiului superpoziției pentru determinarea spectrului hidrodinamic creat de unul sau mai multe puțuri amplasate în apropierea unor asemenea limite.

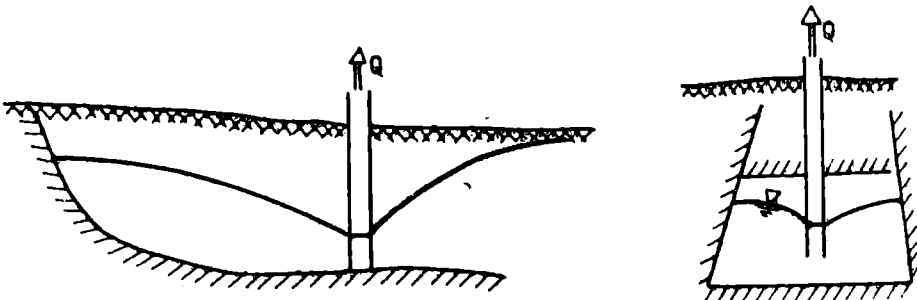


Figura 14.9: Puț în apropierea unei limite de conductivitate redusă

Conform metodei imaginilor mediul real, limitat de o frontieră lineară este înlocuit cu un mediu fictiv, de cele mai multe ori cu extindere infinită. Mediul fictiv este alcătuit din mediul real și imaginea sa simetrică față de limita de separație (*Figura 14.11*). În domeniul imagine se amplasează puțuri simetrice cu cele din domeniul real. În domeniul fictiv alcătuit din zonele imagine și reale limita de separație dispare. Caracteristicile puțurilor imagine sunt astfel alese încât spectrul hidrodinamic în zona

reală a mediului fictiv produs de sistemul de puțuri (reale și imaginare) să fie identic cu spectrul produs de puțul real în domeniul real.

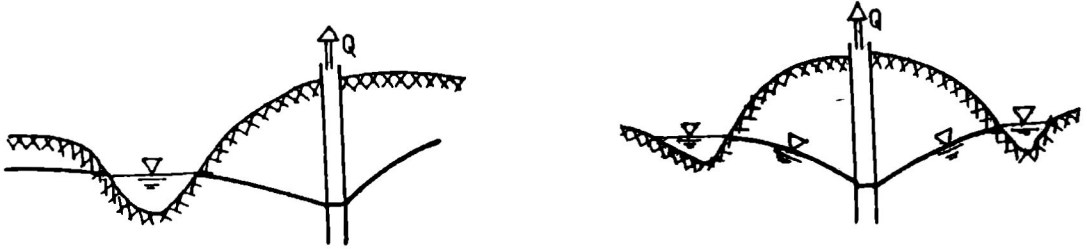


Figura 14.10: Puț deschis în vecinătatea unor limite de alimentare

Pentru a clarifica principiul metodei imaginilor vom considera câteva exemple.

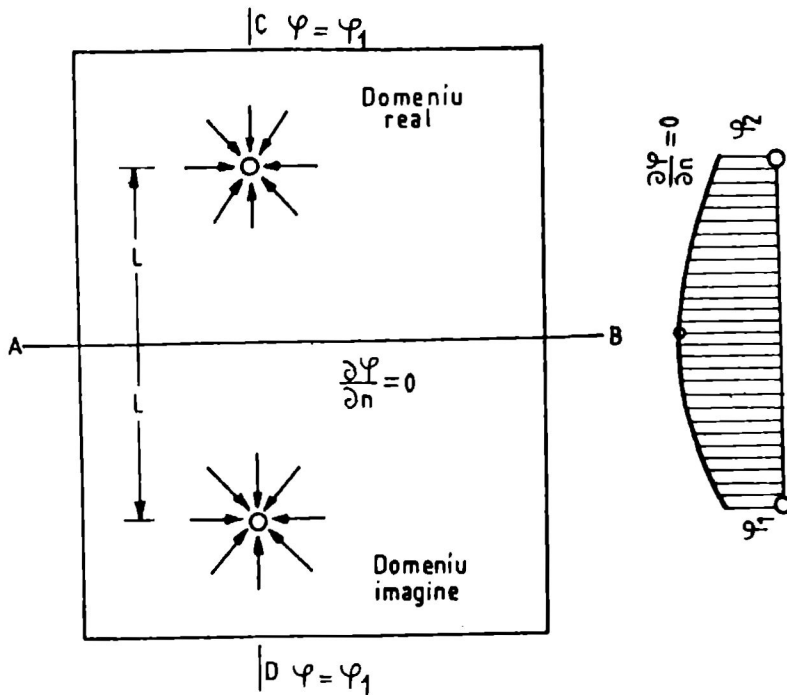


Figura 14.11: Principiul metodei imaginilor. (dupa J. Bear, 1977)

1. Puț perfect deschis într-un acvifer mărginit de o limită impermeabilă.

Domeniul real este reprezentat de semiplanul ($x > 0$) delimitat de axa Y (limită AB , impermeabilă). La distanța d de această limită se află un puț care extrage debitul Q (Figura 14.12).

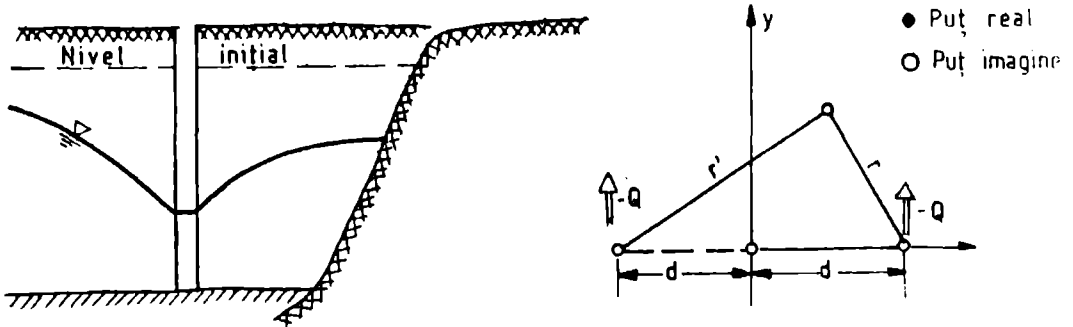


Figura 14.12. Puț în vecinătatea unei limite impermeabile.

Domeniul imagine este reprezentat de semiplanul ($x < 0$) astfel încât domeniul fictiv este întregul plan. Pentru a defini caracteristicile puțului imagine vom observa că în mediul real limita impermeabilă este linie de curent conform condiției: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{Ab} = 0$ (Figura 14.13).

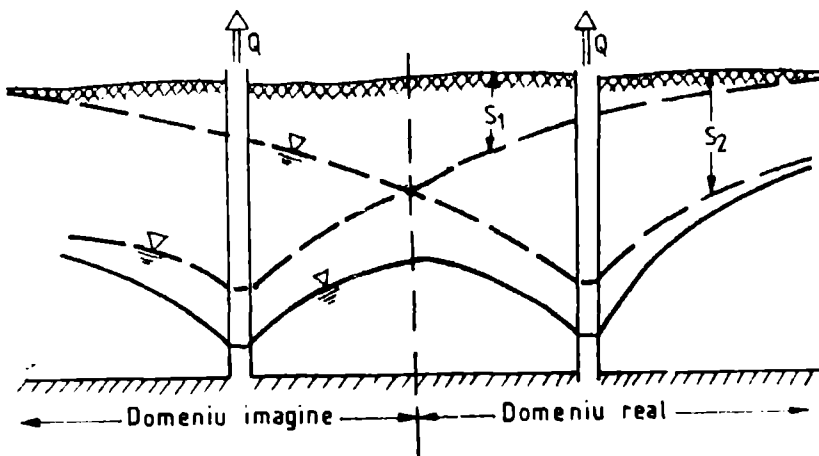


Figura 14.13: Metoda imaginilor pentru un puț deschis în vecinătatea unei limite impermeabile

Datorită acestui fapt, denivelările vor fi mai mari decât cele care ar fi fost produse de același puț într-un mediu infinit. Puțul imagine va trebui deci să măsoare denivelarea creată de cel real. În consecință puțul imagine va fi tot un puț de extracție, simetric cu puțul real și având același debit cu acesta. În spectrul hidrodinamic creat de cele două puțuri linia AB din mediul fictiv este atunci o linie de cumpănă, iar denivelarea totală se obține prin însumarea denivelărilor produse de cele două puțuri (Figura 14.13).

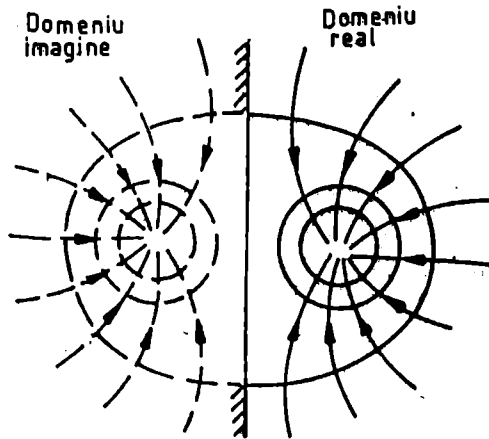


Figura 14.14: Spectrul hidrodinamic al unui puț deschis în vecinătatea unei limite impermeabile (după J. Bear, 1977)

Avem atunci pentru un punct situat la distanțele r și r' de cele două puțuri:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_w} + \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r'}{r_w} = \frac{Q}{\pi T} \ln \frac{(rr')^{\frac{1}{2}}}{r_w} \quad (14.37)$$

La distanțe suficient de mari $r' = r$ și denivelarea s devine:

$$s = \frac{Q}{\pi T} \ln \frac{r}{r_w} \quad (14.38)$$

unde am notat cu r_w raza puțului.

Se observă că denivelarea produsă de un puț situat în apropierea unei limite impermeabile este dublul celei produse de un puț cu același debit deschis într-un acvifer infinit. Spectrul hidrodinamic (Figura 14.14) pune în evidență linia de cumpănă creată de sistemul de puțuri în lungul liniei AB .

2. Puț perfect în vecinătatea unei limite de alimentare.

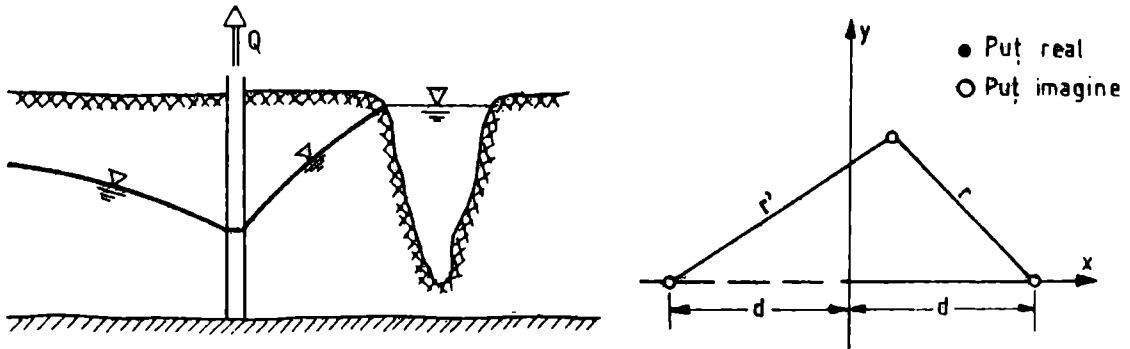


Figura 14.15: Puț în vecinătatea unei limite de alimentare

Ca și în cazul precedent domeniul imagine este planul ($x < 0$), astfel încât domeniul fictiv devine întreg planul.

Ca și în domeniul real, în domeniul fictiv limita de alimentare va fi o echipotențială. Comparativ cu denivelările create într-un mediu infinit, prezența limitei de alimentare conduce la micșorarea denivelărilor. Pentru a realiza acest efect de micșorarea denivelărilor în apropierea limitei, puțul imagine va fi un puț de alimentare avînd același debit Q (Figura 14.16).

Denivelarea totală se obține prin suprapunerea denivelărilor create de cele două puțuri. Avem atunci:

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r'} + \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r} = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r'}{r} \quad (14.39)$$

unde R este raza de influență iar r și r' sunt distanțele de la cele două puțuri.

De remarcat că denivelarea s tinde la zero pentru r, r' tinzând la infinit. Aceasta înseamnă că soluția obținută pentru regimul permanent este fizic plauzibilă.

Fie x_0 și $y=0$ coordonatele puțului de rază r_w . Scriind relația (14.39) în coordonate carteziene obținem:

$$s(x, y) = \frac{Q}{4\pi T} \frac{(x + x_0)^2 + y^2}{(x - x_0)^2 + y^2} \quad (14.40)$$

Deoarece $x_0 \gg r_w$, avem $x \approx x_0 + r_w$ și putem face atunci următoarea aproximație:

$$\begin{aligned} x + x_0 &\approx 2x_0 \\ x - x_0 &\approx r_w \end{aligned} \quad (14.41)$$

Introducând această aproximație în relația (14.40) obținem pentru denivelarea s :

$$s(x, y) = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2x_0}{r_w} \quad (14.42)$$

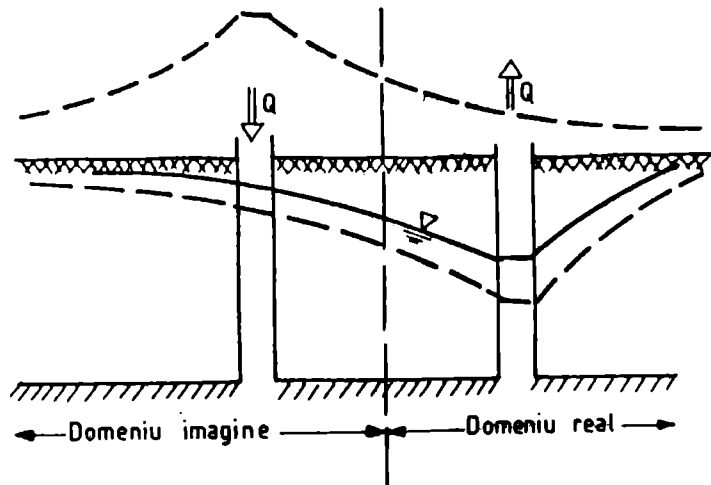


Figura 14.16 Metoda imaginilor pentru un puț deschis în vecinătatea unei limite de alimentare

Comparând această expresie cu denivelarea creată de un puț într-un acvifer cu extindere infinită (12.) observăm că $R=2x_0$. Dacă un puț este amplasat în apropierea unei limite de alimentare atunci raza sa de alimentare este dublul distanței de la axul puțului la limita respectivă.

Prin metoda imaginilor am echivalat spectrul hidrodinamic creat de un puț situat în apropierea unei frontiere impermeabile cu spectrul unui dublet (.1 se compara relațiile 14.29 și 14.39)

Atât echipotențialele cât și liniile de curent sunt date de cercurile lui Apolonius, frontiera de alimentare fiind o echipotențială. Evident domeniul real în acest caz fiind semiplanul ($x>0$) se va păstra din domeniul fictiv doar spectrul conținut în acest plan (Figura 14.17).

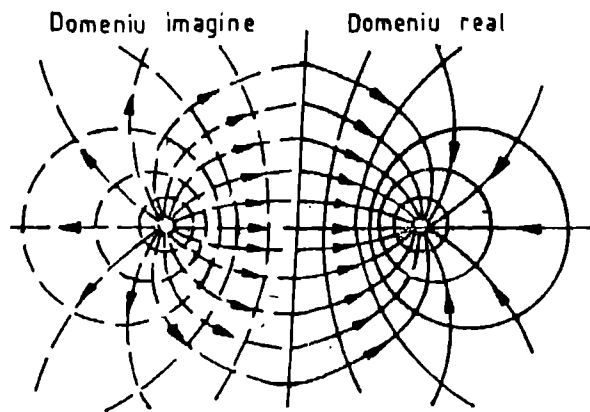


Figura 14.17: Spectrul hidrodinamic al unui puț amplasat în vecinătatea unei limite de alimentare (după J.Bear, 1977)

1. Combinații de frontiere

Metoda imaginilor poate fi folosită și pentru analiza unor situații mai complicate. Figura 14.18(a,b,c) prezintă cazul unui puț amplasat în sfertul de plan $x,y>0$ și mărginit de combinații de frontiere de alimentare și impermeabile. Domeniul fictiv conduce la o serie de puțuri de alimentare sau drenaj în funcție de caracterul limitei (alimentare sau impermeabilă). Cazul cel mai interesant este cel din figura 14.18c unde puțul de drenaj A este delimitat pe axa OY de o limită de alimentare și pe axa OX de o limită impermeabilă. Domeniul fictiv este întregul plan unde avem o limită de alimentare în lungul axei OY , respectiv o limită impermeabilă în lungul axei OX .

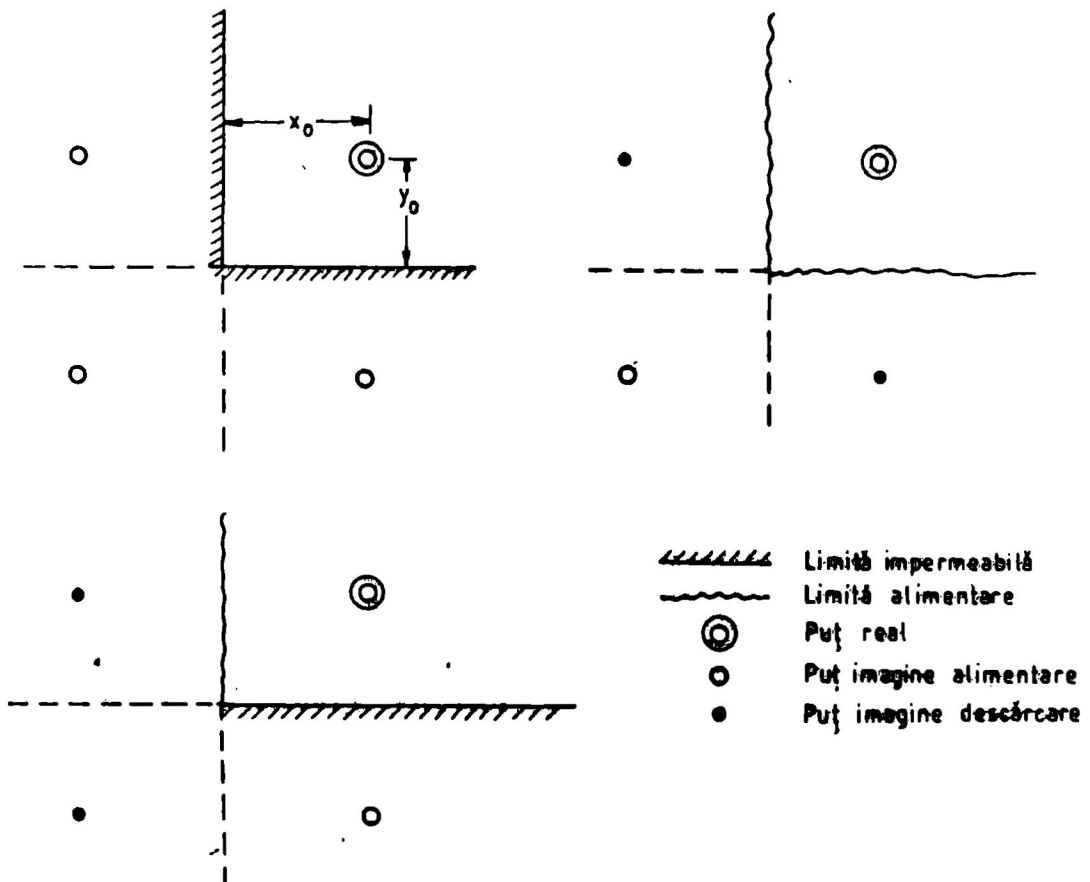
Limita impermeabilă conduce la un puț imagine de același tip (B) a cărei imagine față de limita de alimentare este un puț de semn contrar (puț de alimentare C). imaginea puțului C față de limita impermeabilă este tot un puț de alimentare D .

Denivelarea totală se obține din suprapunerea denivelărilor individuale. Avem:

$$s = s_A + s_B + s_C + s_D = -\frac{Q}{2\pi T} \ln r_A - \frac{Q}{2\pi T} \ln r_B + \frac{Q}{2\pi T} \ln r_C + \frac{Q}{2\pi T} \ln r_D \quad (14.43)$$

sau:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left[\frac{(x-a)^2 + (y+b)^2}{(x+a)^2 + (y+b)^2} \cdot \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x+a)^2 + (y-b)^2} \right] \quad (14.44)$$



*Figura 14.18: Metoda imaginilor în cazul unor combinații de frontiere
(După J Bear 1977)*

4. Puț deschis într-un acvifer bandă cu extindere infinită .

Figura 14.19 prezintă un puț A de extracție deschis într-un acvifer mărginit de două limite de alimentare situate la distanța d , puțul fiind la distanța x_0 de limita din stânga.

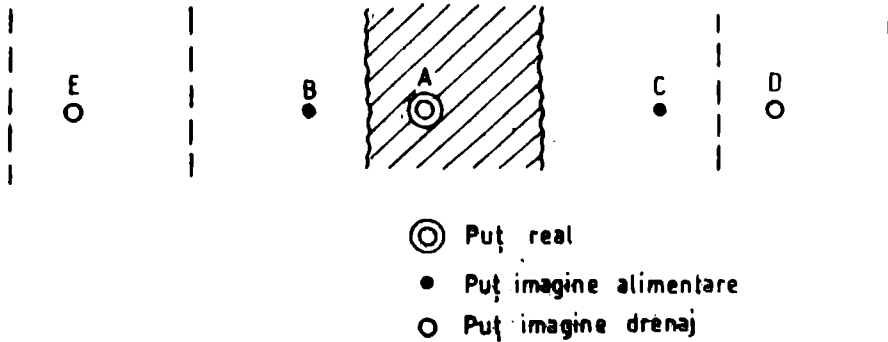


Figura 14.19: Metoda imaginilor în cazul unui puț deschis într-un acvifer bandă
(După J. Bear 1977)

Pentru a echilibra denivelarea produsă de puțul A asupra nivelelor pe limitele aa' și bb' unde sarcina piezometrică trebuie să rămână constantă se construiesc două puțuri imaginare, de alimentare B și C . Dacă puțul B compensează denivelarea produsă de A pe limita aa' el crează o creștere suplimentară pe limita bb' . Pentru a compensa acest efect este necesar un puț de extracție situat la aceeași distanță $(d+x_0)$ de limita bb' (D). Este ca și cum imaginea limitei aa' față de bb' ar fi o limită impermeabilă cc' .

Același efect îl are și puțul C : el echilibrează denivelarea produsă de A pe limita bb' dar produce o creștere suplimentară de nivel pe aa' . Pentru compensarea acestui aport se introduce puțul de extracție D , etc.

În acest fel domeniul real de curgere este înlocuit cu domeniul fictiv, extins la infinit în tot planul și alcătuit dintr-o alternanță de benzi separate succesiv de limite de alimentare și drenaj.

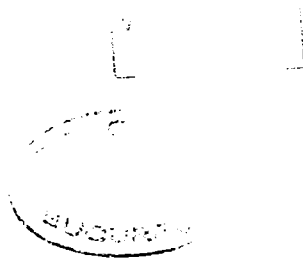
Efectul puțului în acviferul bandă este echivalent cu un șir infinit de dublete astfel încât denivelarea totală este:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{(x - x_0 - 2nd)^2 + y^2}{(x - x_0 + 2nd)^2 + y^2} \quad (14.45)$$

BIBLIOGRAFIE

1. BEAR, J (1972): *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, New York.
2. BEAR, J (1979): *Hydraulics of Groundwater*, McGraw Hill New York.
3. COMOLET, J (1981): *Mécanique des Fluides (Tomes 1,2,3)*, Ed. Masson, Paris.
4. DOMENICO, P , SCHWARTZ (1992) *Physical and Chemical Hydrogeology*, John Wiley & Sons New York.
5. GILES, R, EVETT,J, LIU,O(1995): *Mécanique des Fluides et Hydraulique*, McGraw Hill New York.
6. HARR, M (1962) : *Groundwater and Seepage*. McGraw Hill New York..
7. IAMANDI, C, PETRESCU, V (178): *Mecanica Fluidelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București.
8. ISBASOIU,E,C, GEORGESCU,S.,C (1995); *Mecanica Fluidelor*, Ed. Tehnică, Bucuresti.
9. de MARSILY, G: (1982) *Hydrogéologie Quantitative*, Ed. Masson, Paris.
10. ZAMFIRESCU, F (1995) *Hidrogeologie. Dinamica Apelor Subterane*. Ed. Universității. București
11. ZAMFIRESCU, F (1997) *Elemente de Bază în. Dinamica Apelor Subterane*. Ed.Didactică și Pedagogică București

VERIFICAT
2017



**Tiparul s-a executat sub cda 663/1999
la Tipografia Editurii Universității din București**

BIBLIOTECA CENTRALA
UNIVERSITARA "CAROL I"



✓

DATA RESTITUIRII		
7. MAI 2005		
31. MAI 2005		
01. JUN. 2011		
7. JUN. 2011		
14. JUN. 2011		
15. JUN. 2011		
01. JUN. 2011		
06. IUL. 2012		

ISBN 973-575-422-3

Lei 43900